MAT 4061 GALOIS TEORİSİ FİNAL SORULARI

Ad-Soyad :.CEVAP ANAHTARI........ **17.01.2006**

No :............................

Soru 1) n bir pozitif tamsayı ve I = (n), $\mathbb{Z}$'de n ile üretilen temel ideal olsun. Bu taktirde $\mathbb{Z}/I$ bölüm halkasının $\mathbb{Z}_n$'e izomorf olduğunu gösteriniz.

I = (n) = {nk | k $\in$ $\mathbb{Z}$ }'dir. $\mathbb{Z}/I$ bölüm halkasının elemanları m+I = m + (n) = {m+nk | k $\in$ $\mathbb{Z}$ }'dir. $\mathbb{Z}_n$'in elemanları da $\overline{m}$ = m + nk şeklindedir. $\overline{m} \rightarrow$ m+nk dönüşümünün bir izomorfizm olduğu kolayca gösterilebilir.

Soru 2) R bir tamlık bölgesi değilken $\partial(fg) = \partial(f) + \partial(g)$ formülünün, R[x]'de yanlış olabileceğini gösteriniz. Burada $\partial(f)$ ile f fonksiyonunun derecesi gösterilmektedir.

R = $\mathbb{Z}_6$ olsun. $\mathbb{Z}_6$[x]'de f(x) = 2x+1 ve g(x) = 3x-1 polinomlarını alalım. $\partial(f)$ = $\partial(g)$ = 1'dir. f.g(x) = x-1 olup $\partial(f \cdot g)$ = 1 olur. Yani verilen formül her zaman doğru değildir.

Soru 3) $x^3 - 6x^2 + 14x - 15 = 0$ denkleminin köklerini belirleyiniz.

$$x \rightarrow x + \frac{6}{3} = x + 2 \text{ dönüşümü yapılırsa}$$

$$(x+2)^3 - 6(x+2)^2 + 14(x+2) - 15 = x^3 + 2x - 3$$

düşürülmüş polinomu elde edilir. Bu polinomun aşikâr bir kökü x = 1 olduğundan orjinal denklemin bir kökü 1+2 = 3 olur. O halde diğer iki kök

$$(x^3 - 6x^2 + 14x - 15)/(x-3) = x^2 - 3x + 5$$

denkleminin kökleridir. Bunlar ise $\dfrac{3 \pm \sqrt{11}i}{2}$ dir.

Soru 4) $x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = 0$ denklemini çözmek için kullanılan 3. derece polinomu bulunuz.

$x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = (x^2+kx+l)(x^2-kx+m)$ yazılıp polinom eşitliği kullanılırsa

$$l + m - k^2 = 6$$
$$k(m-l) = -60$$
$$lm = 36$$

elde edilir. $2m = k^2+6-60/k$ ve $2l = k^2+6+60/k$ değerleri üçüncü denklemde yerine konulursa

$k^6+12k^4-108k^2-3600 = 0$ ve $k^2 = t$ dönüşümü ile

$t^3+12t^2-108t-3600 = 0$

bulunur.

Soru 5) $\mathbb{Z}_3$'e $x^2 + x + 2 = 0$ polinomunun bir kökünü katarak GF(9)'un elemanlarını elde ediniz. Kattığınız bu kökün tersini bulunuz.

$x^2 + x + 2 = 0$ polinomunun $\mathbb{Z}_3$'te kökü yoktur. Yani ikinci dereceden indirgenemez bir polinomdur. Dolayısıyla eğer bu polinomun bir köküne α dersek $a^2+a+2=0$ olup $a^2 = -a-2 \equiv 2a+1 \pmod 3$ yazabiliriz. O halde

GF(9) = {a+bα : a, b $\in$ $\mathbb{Z}_3$} = {0, 1, 2, α, 1+α, 2+α, 2α, 1+2α, 2+2α} olarak bulunur. Katılan kök α olduğundan α'nın tersi

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{-2}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \alpha}{\alpha} = \alpha + 1$$

olur.

Not: *Süre 70 dakikadır. Başarılar.* **İNC**