MAT 3013 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ I 1.ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:....CEVAP ANAHTARI... **24.11.2005**

Soru 1) **p asal tek sayı ve $n > 0$ olmak üzere $\varphi(2^n p) = 192$ olacak şekildeki (n,p) ikililerini bulunuz.**

(2,p) = 1 olduğundan $\varphi(2^n)\varphi(p) = 192$ yazabiliriz. Bu ise $2^{n-1}\cdot(p-1) = 192$ demektir. $192 = 2^6.3$ olduğundan n-1≤ 6 yani n≤7 olmalıdır. O halde

n = 1 için p = 193,
n = 2 için p = 97,
n = 3 için p = 49,
n = 4 için p = 25,
n = 5 için p = 13,
n = 6 için p = 7,
n = 7 için p = 4

değerleri elde edilir. Ancak p asal olduğundan aranan şartı sağlayan p asallarının 193, 97, 13 ve 7 olduğu; dolayısıyla da aranan (n,p) ikililerinin (1,193), (2,97), (5,13) ve (6,7) olduğu görülecektir.

Soru 2) **Kongrüanslardan faydalanarak 11 ile bölünebilme için bir kural bulunuz.**

$n = a_k\cdot 10^k + a_{k-1}\cdot 10^{k-1} + \cdots + a_1\cdot 10^1 + a_0 \in N$ olsun.

$f(x) = a_k\cdot x^k + a_{k-1}\cdot x^{k-1} + \ldots + a_1\cdot x + a_0$ tanımlayalım.

$-1 \equiv 10\ (11)$ olduğundan $f(-1) \equiv f(10)\ (11)$ olur. Yani $n = f(10)$ ile $f(-1) = \pm(a_k - a_{k-1} + \ldots - a_1 + a_0)$ sayılarının ya ikisi de 11 ile bölünebilir ya da ikisi de bölünemezdir. Bu ise her sayının 11 ile bölünebilmesinin tamamen basamaklarının alterne toplamının 11'in katı olması ile mümkün olduğunu gösterir.

Soru 3) **p asal olsun. 1≤k≤p-1 için $\binom{p}{k}$ Binom katsayısının p ile bölünebildiğini gösteriniz.**

$\binom{p}{i}$ = p!/(i!(p-i)!) olup p asalı payı böler. Tek problem olabilecek durum p'nin paydayı da bölmesidir. Ancak hem i, hem de p-i, p'den küçük olduklarından p asal çarpanını bulundurmazlar. O halde p, paydayı bölmez. O halde p, $\binom{p}{i}$ sayısını bölmelidir.

Soru 4) **(a,b) = 1 ise (a–b,a+b) = 1 veya 2 olduğunu gösteriniz.**

(a,b) = 1 olsun ve (a–b,a+b) = d diyelim. d | 2 olduğunu göstereceğiz. d | (a-b) ve d | (a+b) olduğundan

d | [(a+b)+(a-b)] = 2a ve d | [(a+b)-(a-b)] = 2b dir. Bu durumda (a,b) = 1 olduğundan d | 2 olmalıdır.

Soru 5)

$$x \equiv a \quad (m)$$
$$x \equiv a \quad (n)$$

sisteminin çözümünün $x \equiv a \ ([m,n])$ olduğunu gösteriniz.

İlk kongrüanstan k bir tamsayı olmak üzere, x = a + mk yazabiliriz. Bu değer ikincide yerine konulduğunda

$$a + mk \equiv a \quad (n)$$

veya denk olarak, $mk \equiv 0 \ (n)$ kongrüansı elde edilir. Bu son kongrüansın çözümü ise

$$k \equiv 0 \quad \left(\frac{n}{(m,n)}\right)$$

şeklindedir. Bu çözüm t bir tamsayı olmak üzere

$$k = \frac{n}{(m,n)}t$$

şeklinde düşünülebilir. Bu değer yukarıda x için bulunan ifadede yerine konulursa

$$x = a + m\frac{nt}{(m,n)} = a + t[m,n]$$

veya istendiği şekilde

$$x \equiv a \quad ([m,n])$$

elde edilir.

Not: Süre 70 dakikadır. Başarılar... İNC