MAT2008 METRİK UZAYLAR I ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:... 02.08.2005

No :...

Soru 1) Alışılmış reel uzayda $A=\mathbf{Q}\cup\sqrt{2}$ kümesinin içini, dışını, sınırını, kapanışını ve yığılma noktaları kümesini belirleyiniz.

- A nın içi: Hiçbir x rasyonel sayısının ya da $\sqrt{2}$ nin (x-a,x+a) komşuluğu rasyonel sayılar kümesinde kalacak şekilde bulunamayacağından boştur.
- A nın dışı: A nın tümleyeni irrasyonel sayılardan $\sqrt{2}$ nin çıkarılmasıyla elde edileceğinden bunun içi de boştur.
- A nın sınırı: **R** den A nın içi ve dışı çıkarılarak elde edileceğinden **R** nin tamamıdır.
- A nın yığılma noktaları kümesi: **R** dir. Çünkü her bir reel sayının her bir komşuluğunda mutlaka rasyonel sayılar bulunacaktır.
- A nın kapanışı: **R** dir. Çünkü A ya yığılma noktalarının katılmasıyla elde edilmektedir.

Soru 2) $C[0,1]$ üzerinde tanımlı $f(x)=x^2-5x+6$ ve $g(x)=3x-x^2$ fonksiyonları için

$$d_\infty(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\}$$

sayısını hesaplayınız.

$|f(x) - g(x)| = |\, x^2-5x+6 - (3x-x^2)\,|$
$\qquad\qquad = |\, 2x^2-8x+6|$

olup [0,1] aralığındaki sup değerini ya aralık içinde bir noktada ya da uç noktalardan birinde alır. Türev alındığında, $4x-8 = 0$ dan ekstremum değerin $x = 2$ de alındığı görülür. Ancak bu değer [0,1] aralığında kalmadığından, sup değeri ya 0 ya da 1 de elde edilir. $x = 0$ için $\sup|f(x) - g(x)| = 6$ ve $x = 1$ için de $\sup|f(x) - g(x)| = 0$ olduğundan ekstremum değer 6 dır.

Soru 3) R^2 ayrık metrik uzayında A(3,1) noktasının 1 yarıçaplı kapalı komşuluğunu ifade edip çiziniz.

Ayrık metrik uzayda 1 yarıçaplı kapalı komşuluk, 1 birim uzaklığındaki tüm noktaları bulunduracağından uzayın tamamıdır. Yani $\mathbf{R}^2$ dir.

Soru 4) Ayrık metrik uzayda her noktanın kendisinin bir komşuluğu olduğunu gösteriniz.

$x\in X$ olsun. seçersek x in ε komşuluğu
$D(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(y,x) < \varepsilon\}$ olur. $\varepsilon \le 1$ olduğundan bu küme denk olarak
$D(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(y,x) < 1\}$ şekline dönüşür. Ayrık metriğin tanımı gereği
$D(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(y,x) = 0\}$ olur. Buradan da
$D(x, \varepsilon) = \{y \in X : y = x\} = \{x\}$ bulunur.

Soru 5) X_d metrik uzayının bir alt uzayı Y_d olsun. X uzayında açık olan bir küme hangi şartlar altında Y alt uzayında da açık olur? Örnek veriniz. (20 puan)

Üst uzayda açık olan bir A kümesinin alt uzayda da açık olabilmesi için tamamen altuzayda kalmalıdır. Örneğin alışılmış metrik ile birlikte A = (0,1) kümesi X = R de açıktır. Y = (-2,2) altuzayı alınırsa A Y nin bir altkümesi olduğundan A Y de de açıktır.

<u>**Not:**</u> *Süre 70 dakikadır. Başarılar.* **İNC**