

Soru 1) G grubunun mertebesi tek olsun. G 'de tersi kendisine eşit olan bir $a \neq e$ elemanı olmak zorunda mıdır, açıklayınız. Varsa bu tür a elemanlarının toplam sayısı hakkında fikir yürütünüz.

G grubunda bir a elemanı tersiyle birlikte sayıldığında iki eleman elde edilir. Ancak tersi kendisine eşitse, tek eleman olarak sayılabilir. Etkisiz eleman böyle bir elemandır. Eğer G grubunun eleman sayısı tek ise etkisiz eleman dışında çift sayıda elemana sahiptir. Dolayısıyla bu elemanlar, tersleriyle birlikte sayıldığında tersi kendine eşit elemanların olmayabileceğini söyleyebiliriz.

Ancak tersi kendine eşit bir $a \neq e$ elemanı varsa, tersi kendine eşit en az bir b elemanı daha olmak zorundadır. Kalan elemanlar tersleriyle birlikte çift sayıda olurlar. Sonuç olarak, e dışında tersi kendine eşit olan elemanların sayısı çift olmalıdır.

Soru 2) $f : G \rightarrow G$, $f(x) = x^{-1}$ tanımlanıyor. G değişmeli ise f 'in bir homomorfizm olduğunu gösteriniz.

G değişmeli olsun. O halde her a, b elemanı için $a.b = b.a$ yazabiliriz. Şimdi f 'in bir homomorfizm olduğunu göstermeye çalışalım.

$$f(a.b) = (a.b)^{-1} = b^{-1}.a^{-1}$$

olduğundan G nin değişmeliliğini kullanarak $b^{-1}.a^{-1} = a^{-1}.b^{-1}$ yazılırsa sağ taraf $f(a).f(b)$ olduğundan

$$f(a.b) = f(a).f(b)$$

elde edilir.

Soru 3) C_n devirli grubundaki kamutator elemanlarını hesaplayınız.

C_n devirli grubu değişmelidir. Değişmeli bir grupta kamutator elemanları etkisiz eleman olduğundan tüm kamutator elemanları e 'ye eşittir.

Soru 4) G bir değişmeli grup ve $H = \{ x \in G : x^3 = e \}$ olsun. H in G nin bir altgrubu olup olmadığını inceleyiniz.

G değişmeli olsun. a, b H 'in iki elemanı olsun. $a^3 = b^3 = e$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda $a.b^{-1} \in H$ olduğunu göstermeliyiz. Yani $(a.b^{-1})^3 = e$ olduğunu göstermeliyiz. G değişmeli olduğundan

$$(a.b^{-1})^3 = a.b^{-1}.a.b^{-1}.a.b^{-1} = a^3.b^{-3} = e.e = e$$

olur.

Soru 5) $C_7 \times C_7$ direk çarpım grubundaki elemanların mertebelerini bulunuz ve her bir mertebeden kaç tane eleman bulunduğunu açıklayınız. $C_7 \times C_7$ grubu devirli midir?

$(7,7) = 7$ olup aralarında asal olmadıklarından bu direk çarpım C_{49} 'a izomorf değildir. Yani devirli değildir.

Grup 49 elemanlı olduğundan Lagrange teoreminin sonucu gereği gruptaki elemanların mertebeleri 1, 7 veya 49 olabilir. Mertebesi 1 olan bir tek e vardır. Grup devirli olmadığından 49 mertebeli (yani grubu üreten) bir eleman yoktur. O halde $49-1 = 48$ tane elemanın mertebesi 7'dir.