MAT 3035 METRİK UZAYLAR II FİNAL SORULARI

Ad-Soyad:.....CEVAP ANAHTARI............ **14.01.2005**

No :..

Soru 1) **Q'** irrasyonel sayılar kümesi **R** alışılmış uzayında bağlantılı mıdır?

$G = (-\infty,3)$ ve $H = (3,\infty)$ kümeleri bu uzayda açıktır. G ile H ın birleşimi $A = \mathbf{Q'}$ yü örter. G ile H kesişmez. Ayrıca G ve H ın **Q'** nün elemanlarını bulundurduğu açıktır. O halde G ve H kümeleri A nın bir ayrışımıdır. Yani **Q'** irrasyonel sayılar kümesi **R** uzayında bağlantısızdır.

Soru 2) Sürekli iki fonksiyonun birleşiminin de sürekli olduğunu gösteriniz. (20 puan)

$f: X_d \to Y_m$ ve $g: Y_m \to Z_s$ sürekli olsun. $gof: X_d \to Z_s$ fonksiyonunun sürekli olduğunu göstermek istiyoruz. A, Z_s uzayında açık ise g sürekli olduğundan $g^{-1}(A)$, Y_m de açıktır. O halde f sürekli olduğundan $f^{-1}(g^{-1}(A))$, X_d de açıktır. Halbuki bu son küme $(gof)^{-1}(A)$ olup açık oluşu gereği gof fonksiyonunun sürekli olduğu görülür.

Soru 3) Bir metrik uzayda yakınsak bir dizi Cauchy dizisi midir? Açıklayınız. (20 p)

(x_n), X_d metrik uzayında yakınsak bir dizi olsun ve $p \in X$ noktasına yakınsasın. Yakınsaklık gereği her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $m, n \geq n_0$ için $d(x_n,p) < \varepsilon/2$ ve $d(x_m,p) < \varepsilon/2$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı mevcuttur. O halde aynı n_0 doğal sayısı için

$$d(x_m,x_n) \leq d(x_m,p) + d(p,x_n)$$
$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

olur ki bu da (x_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir.

Soru 4) Bir metrik uzayda yakınsak bir dizinin limitinin tek olduğunu gösteriniz. Böyle bir dizinin yığılma noktaları hakkında ne diyebiliriz? (20 puan)

Tersine (x_n) dizisinin a ve b gibi iki noktaya yakınsadığını varsayalım. Dolayısıyla, verilen her $\varepsilon>0$ sayısına karşılık, her $n \geq n_1$ için $d(x_n,a)< \varepsilon/2$ olacak biçiminde bir $n_1 \in \mathbf{N}$ ve her $n \geq n_2$ için $d(x_n,b)< \varepsilon/2$ olacak biçiminde bir $n_2 \in \mathbf{N}$ vardır. Eğer $n_o = \max\{n_1,n_2\}$ olarak seçilirse, her $n \geq n_0$ için

$$d(a,b) \leq d(a,x_n) + d(x_n,b) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

elde edilir, $\varepsilon>0$ sayısı keyfi olduğundan $d(a,b) = 0$ ve dolayısıyla $a = b$ dir.

Soru 5) (X,d) ayrık metrik uzayının tam olup olmadığını açıklayınız.

Ayrık metrik uzaydaki Cauchy dizilerinin terimlerinin sadece sonlu tanesi farklı olup, bir yerden sonraki tüm terimleri ise sabittir. Dolayısıyla yakınsaktır. Yani ayrık metrik uzayda her bir Cauchy dizisi yakınsaktır ve uzay da tamdır.

Not: *Süre 70 dakikadır. Başarılar.* ***İNC***