

# MAT 4061 GALOIS TEORİSİ FİNAL SORULARI

Ad-Soyad:.....CEVAP ANAHTARI.....

12.01.2005

No :.....

**Soru 1)**  $x^5 - 10x^4 + 2x - 20 = 0$  polinomunun düşürülmüşünü elde ediniz. (20 puan)

$x$  yerine  $x - a_{n-1}/n a_n = x - (-10/5).1 = x+2$  yazılırsa, ve gerekli düzenlemeler yapılırsa düşürülmüş polinom  $x^5 - 40x^3 - 160x^2 - 238x - 144$  olarak elde edilir.

**Soru 2)**  $\sqrt{3+\sqrt{4i}}$  sayısının  $\mathbb{Q}$  üzerindeki minimal polinomunu bulunuz. Bu sayı  $\mathbb{Q}$  üzerinde cebirsel midir? (20 puan)

$x = \sqrt{3+\sqrt{4i}}$  olsun.  $x^2 = 3+\sqrt{4i}$  olup  $x^2-3 = \sqrt{4i}$  ve  $(x^2-3)^2 = 4i$  yazılır. Parantez açılınca  $x^4-6x^2+9 = 4i$  elde edilir. Burada  $i$  sayısı  $\mathbb{Q}$ 'da kalmadığından yine kare alınarak  $x^8-12x^6+54x^4-108x^2+81 = 0$  minimal polinomu bulunur. Dolayısıyla bu sayı  $\mathbb{Q}$  üzerinde cebirseldir.

**Soru 3)** Bir halkada  $n$ -inci dereceden bir polinomun kaç kökü olabilir. Örnek veriniz. (20 puan)

Halka aynı zamanda bir cisim ise, polinomun derecesi  $n$  olduğunda tam  $n$  tane kökü vardır. Örneğin  $\mathbb{R}$  reel sayılar cisminde  $n$ -inci dereceden bir polinomun en çok  $n$  kökü olduğu cebirin temel teoremi olarak bilinir.

Halka cisim özelliklerine sahip değilse kök sayısı  $n$  den fazla olabilir. Örneğin  $\mathbb{Z}_{12}$  halkasında  $x^2-1 = 0$  polinomunun 1, 5, 7 ve 11 olmak üzere dört kökü vardır.

**Soru 4)** 9 elemanlı bir cismin elemanlarını elde etmek için kullanılacak herhangi bir minimal polinom bulunuz. Bu elemanları yazınız ve terslerini belirleyiniz. (20 puan)

Bu cisim  $GF(3^2)$ 'dir. Elemanları da  $x^9-x = 0$  polinomunun farklı 9 köküdür. Bu polinom çarpanlara ayrıldığında

$$\begin{aligned}x^9-x &= x(x^8-1) = x(x^4-1)(x^4+1) \\ &= x(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu cisim ikinci dereceden bir genişleme olduğundan  $x^2+1$  polinomunu seçebiliriz. (bu polinom mod 3'te indirgenemeyen bir polinom olmalıdır,  $x^2+x+2$ ,  $x^2+2x+2$ ,  $2x^2+2$ ,  $2x^2+x+1$ ,  $2x^2+2x+1$  de alınabilir). Bu polinomun kökleri ise  $i$  ve  $-i$ 'dir. Dolayısıyla  $GF(9)$ 'un elemanları  $0, 1, 2, i, 1+i, 2+i, 2i, 1+2i$  ve  $2+2i$ 'dir. Bunların (0 dışında) tersleri ise sırasıyla  $1, 2, 2i, 2+i, 1+i, i, 2+2i, 1+2i$ 'dir. Örneğin  $1+i$ 'nin tersini bulmak için  $(1+i)(a+ib) = 1$  denklemini mod 3'de çözmek gerekir. Yani  $a-b=1$  ve  $a+b=0$  denklemlerini mod 3'te çözmeliyiz. Bu da  $a=2$  ve  $b=1$  için sağlanır.

**Soru 5)**  $P(x) = x^5 + 25x^3 - 20x^2 + 15x - 75$  polinomu  $\mathbb{Q}$  üzerinde Eisenstein kriterine göre indirgenebilir midir? (20 puan)

25, 20, 15, 75 sayılarını bölen tek asal 5'tir.  $5^2$ , sabit terim olan 75'i böldüğünden Eisenstein kriteri gereği indirgenebilir diyemeyiz.

**Not:** Süre 70 dakikadır. Başarılar. **İNC**