MAT 3013 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ I FİNAL SORULARI

Ad-Soyad:.........CEVAP ANAHTARI...... 10.08.2004

No :...

Soru 1) $p > 2$ sayısı iki tamkarenin toplamı şeklinde ifade edilebilen bir asal sayı ise $\varphi(p)$ nin 4 ile bölünebildiğini gösteriniz.

$p = x^2+y^2$ şeklinde yazılabiliyorsa $p \equiv 0$, 1 veya 2 (4) olduğunu biliyoruz. $p\equiv 0$ ve 2 (4) iken $p > 2$ olduğundan p asal olmaz. O halde $p\equiv 1$ (4) tür. Yani $p = 4k+1$, $k\in\mathbf{Z}$ şeklindedir. Ancak $\varphi(p) = p-1$ olduğundan

$$\varphi(p) = \varphi(4k+1) = 4k$$

elde edilir ve bu 4 ile bölünebilirdir.

Soru 2) p bir tek asal ise $x^2 \equiv 1$ (p) kongrüansının $\mathbf{Z}_p$ de kaç çözümü vardır? Belirleyiniz.

$x^2 \equiv 1$ (p) ise $x^2 - 1 \equiv 0$ (p) veya $(x-1)(x+1) \equiv 0$ (p) dir. Bu da $p \mid (x-1)(x+1)$ demektir. p asal olduğundan $p|(x-1)$ veya $p|(x+1)$ olur. Bu da verilen kongrüansın $x \equiv 1$ (p) veya $x \equiv -1 \equiv p-1$ (p) şeklinde iki tane çözümünün olduğunu gösterir.

Soru 3) Her $a\in U_{37}$ için $\left(\frac{-a}{37}\right)=\left(\frac{a}{37}\right)$ olduğunu gösteriniz.

$-1 \equiv 6^2$ (37) olduğundan $\left(\frac{-1}{37}\right)=\left(\frac{6^2}{37}\right)=+1$ dir. O halde $\left(\frac{-a}{37}\right)=\left(\frac{-1}{37}\right)\left(\frac{a}{37}\right)=\left(\frac{a}{37}\right)$ olduğu açıktır.

Soru 4) $t(n)$, n doğal sayısının pozitif bölenlerinin toplamı olmak üzere

$$t\left(p_1^3 p_2^3\right)=32.t(p_1^2+1).t(p_2^2+1)$$

olacak şekildeki farklı p_1 ve p_2 asallarını bulunuz.

p_1 ve p_2 asalları farklı ve t bir çarpım fonksiyonu olduğundan

$$t\left(p_1^3\right)t\left(p_2^3\right)=32.t(p_1^2+1).t(p_2^2+1)$$

yazabiliriz. O halde

$$\frac{p_1^4-1}{p_1-1}.\frac{p_2^4-1}{p_2-1}=32.t(p_1^2+1).t(p_2^2+1)$$

buluruz. Sol taraf çarpanlara ayırılıp sadeleştirildiğinde

$$(p_1+1).(p_1+1)=32$$

elde edilir. Mümkün olan *1.32*, *2.16* ve *4.8* çarpımları ele alındığında aranan asalların $p_1 = 3$ ve $p_2 = 7$ olduğu görülür.

Soru 5) a, b, c sıfırdan farklı tamsayılar olmak üzere $ax - by = c$ denkleminin tamsayılarda çözümünün olması için gerek ve yeter şartı ifade ediniz. Genel çözümü belirleyiniz.

$ax + by = c$ denkleminin çözüm şartı $d = (a,b)$ nin c yi bölmesi idi. O halde bu benzer denklemi

$$ax + (-b)y = c$$

şeklinde düşünürsek çözüm şartı $(a,-b) \mid c$ olması olarak elde edilir. Tabii $(a,-b) = (a,b)$ olduğundan çözüm şartı a ile b nin obebinin c yi bölmesi olarak ta ifade edilebilir. $ax + by = c$ denkleminin genel çözümü t bir tamsayı olmak üzere $x = x_0 + \frac{b}{d}t$ ve $y = y_0 - \frac{a}{d}t$ olduğundan $ax + (-b)y = c$ denkleminin genel çözümü t bir tamsayı olmak üzere $x = x_0 - \frac{b}{d}t$ ve $y = y_0 - \frac{a}{d}t$ şeklinde bulunur.

İNC