

MAT3014 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ II ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:.....

23.07.2004

No :.....

Soru 1) S_3/A_3 bölüm grubunu, bu grubun elemanlarını ve mertebesini belirleyiniz.

$|S_3| = 6$ ve $|A_3| = 3$ olduğundan $|S_3:A_3| = 2$ dir. Dolayısıyla bölüm grubu iki elemanlı tek grup olan Z_2 (veya C_2 dir). Bu bölüm grubunun elemanları olan kosetler de a bir tek permütasyon olmak üzere Z_2 ile aZ_2 dir. Mertebenin 2 olduğu açıktır.

Soru 2) S_4 grubundaki çift permütasyonların sayısını belirtiniz. Bunlardan dördünü yazınız.

S_4 grubundaki çift permütasyonların grubu A_4 alterne grubudur ve $4!/2 = 12$ elemanlıdır. Bu 12 çift permütasyon, $(1234) = (12)(13)(14)$, $(1243) = (12)(14)(13)$, $(1324) = (13)(12)(14)$, $(1342) = (13)(14)(12)$, $(1423) = (14)(12)(13)$, $(1432) = (14)(13)(12)$, (12) , (13) , (14) , (23) , (24) , ve $(1)(2)(3)(4) = e$ dir.

Soru 3) $\varphi : G \rightarrow G'$ bir monomorfizm ise $G/\text{Ker } \varphi$ bölüm grubunu hesaplayınız.

$\varphi : G \rightarrow G'$ bir monomorfizm ise birebir olduğundan $\text{Ker } \varphi = \{e\}$ dir. O halde soru $G/\{e\}$ nin ne olduğu şeklindedir ki bu da G ye izomorftur.

Soru 4) $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

hangi gruba izomorftur? Açıklayınız.

Bu dört matristen ilki etkisiz eleman olup mertebesi 1 dir. Diğer 3 matrisin karelerini aldığımızda herbirinin birim matris olduğu ve dolayısıyla mertebelerinin 2 olduğu görülür. Bu grup 4 elemanlı olduğundan ya V_4 Klein 4 grubuna ya da C_4 devirli grubuna izomorf olabilir. Dördüncü mertebeden bir eleman olmadığından C_4 olamaz. O halde V_4 grubuna izomorftur.

Soru 5) $\varphi : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$

$$t \mapsto \cos t + i \cdot \sin t$$

dönüşümünün bir homomorfizm olduğunu gösteriniz. Çekirdeğini hesaplayınız.

$$\begin{aligned} \varphi(t+u) &= \cos(t+u) + i \cdot \sin(t+u) \\ &= \cos t \cdot \cos u - \sin t \cdot \sin u + i \cdot (\sin t \cdot \cos u + \cos t \cdot \sin u) \\ &= (\cos t + i \cdot \sin t)(\cos u + i \cdot \sin u) \\ &= \varphi(t) \varphi(u) \end{aligned}$$

olup φ bir homomorfizmdir. Çekirdeği $(\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$ grubunun etkisiz elemanı olan 1'e giden t lerden oluşur. Yani $\cos t + i \cdot \sin t = 1$ olacak şekildeki t lerden oluşur. Bunlar da k bir tamsayı olmak üzere $t = 2k\pi$ şeklindeki t lerdir. Yani $\text{Ker } \varphi = \{t \in \mathbb{R} \mid t = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ dir.

Not: Süre 70 dakikadır. Başarılar. İNC