MAT 3013 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ I 1.ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:.. **22.07.2004**

No :..

Soru 1) p bir asal sayı ve a nın mod p deki mertebesi 3 olsun. Buna göre $1 + a + a^2 \equiv 0 \pmod p$ olduğunu gösteriniz.

$a3 \equiv 1$ (p) olduğu verilmiş. Yani $(a-1)(1+a+a^2) \equiv 0$ (p) dir. a, üçüncü mertebeden olup, a, p modunda 1 olamaz. O halde $1 + a + a^2 \equiv 0$ (p) dir.

Soru 2) $\varphi(8p^n) = 72$ ise p tek asal sayısının ve n doğal sayısının alabileceği değerleri belirleyiniz.

$\varphi(8p^n) = 72$ ise p tek olduğundan $\varphi(2^3)\varphi(p^n) = 72$ demektir. Yani $4\varphi(p^n) = 72$ ve $\varphi(p^n) = 18$ olur. O halde $p^n - p^{n-1} = 18$ dir. Bu da p = 3 = n veya p = 19 ve n = 1 için sağlanır.

Soru 3) a ve b tamsayılar olmak üzere ax+by = c doğrusu koordinatları tamsayılar olan bir noktadan geçiyorsa aslında bu özellikteki sonsuz çoklukta noktadan da geçmesi gerektiğini açıklayınız.

ax+by = c doğrusu koordinatları tamsayılar olan bir (x_1,y_1) noktasından geçsin. Bu lineer Diophant denkleminin genel çözümü düşünüldüğünde $x = x_1 + bt/d$ ve $y = y_1 - at/d$ olup, d, a ve b yi böldüğünden dolayı genel çözümdeki bu x, y ikilisi de her t tamsayı değeri için bir tamsayı ikilisi belirtecektir ve bu ikili denklemin çözümüdür. O halde bu denklemi sağlayan sonsuz çoklukta tamsayı bileşenli nokta mevcuttur.

Soru 4) p asal ise $1 \le k \le p-1$ için $\binom{p}{k}$ Binom katsayısının p ile bölünebildiğini gösteriniz. p asal değilse ne söylenebilir?

$\binom{p}{k} = \dfrac{p!}{k!(p-k)!}$ olup paydaki p! sayısının bir kısmı payda ile sadeleşecektir. Ancak p asal olduğundan, paydadaki faktöriyelli sayılarda p çarpanı yer almaz. Bu yüzden paydaki p sayısı sadeleşmez. O halde $\binom{p}{k}$ sayısı p asal iken p ile bölünebilirdir. p asal değilse, p sayısının kendisinden küçük iki çarpanı vardır ve bu çarpanlar paydadaki çarpanlarla sadeleşebilecektir. Örneğin $\binom{4}{2} = 6$ olup 4 ile bölünmez.

Soru 5) 11 ile bölünebilme kuralını elde ediniz.

$n = a_k10^k+a_{k-1}10^{k-1}+ \ldots +a_110+a_0$ şeklinde bir sayı olsun. $10^i=(11-1)^i$ yazılıp Binom açılımı yapıldığında, her bir 10^i teriminin q bir tamsayı olmak üzere, $11q+(-1)^i$ şekline dönüşeceği açıktır. O halde belli bir m tamsayısı için

$$n = 11m+(-1)^ka_k+(-1)^{k-1}a_{k-1}+ \ldots -a_1+a_0$$

yazılabilir. Yani n sayısının 11 ile bölünebilmesi için

$$(-1)^ka_k+(-1)^{k-1}a_{k-1}+ \ldots -a_1+a_0$$

alterne basamak toplamının 11 ile bölünebilmesi gerekir.

Not: Süre 70 dakikadır. Başarılar... İNC