MAT3014 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ II 1.ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:...CEVAP ANAHTARI.......... **01.04.2004**

No :..

Soru 1) A_4 alterne grubunda kalan 3 adet permütasyon yazınız.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 2)(4) = (1\ 3)(1\ 2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 4)(3) = (1\ 2)(1\ 4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (2\ 4\ 3)(1) = (2\ 4)(2\ 3)$$

Soru 2) Bir G grubunda tüm elemanlar küplerine eşitse; yani her $a \in G$ için $a^3 = a$ ise G nin değişmeli olduğunu gösteriniz.

Her $a \in G$ için $a^3 = a$ ise $a^2 = e$ ya da denk olarak $a = a^{-1}$ demektir. $a, b \in G$ için $a^3 = a$ ve $b^3 = b$ yazabiliriz. $(ab)^3 = ab$ olduğunu da hatırlayalım.

$(ab)^3 = ab$ olup $ababab = ab$ ve böylece de $abab = e$ bulunur. Buradan $a^{-1} = a$ ve $b^{-1} = b$ olduğu da kullanılarak

$$abab = e \Rightarrow ab = b^{-1}a^{-1} = ba$$

olur. Yani G değişmelidir.

Soru 3) i sayısının çarpma işlemine göre ürettiği grubu belirleyiniz. Bu grubun altgruplarının mertebeleri nelerdir? ($i^2 = -1$)

$\langle i \rangle = \{i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1\}$ dir. Dolayısıyla mertebesi 4 tür.Lagrange teoremi gereği altgrupların mertebeleri 4 ün bölenleridir. Yani 1, 2 veya 4 tür.

Soru 4) $\varphi : G \to G'$ bir monomorfizm ise φ nin çekirdeği hakkında neler söylenebilir? Kısaca açıklayınız.

φ bir monomorfizm olduğundan birebirdir. Dolayısıyla teorem gereği, çekirdeği tek elemandan yani e den oluşmak zorundadır.

Soru 5) $\varphi : Z \to Z_6$, $n \to \bar{n}$ dönüşümünün türünü belirleyiniz. Çekirdeğini bulunuz. Çekirdek kaç elemanlıdır?

Bu dönüşümün birebir olmadığı, ancak örten bir homomorfizm olduğu görülebilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} \varphi &= \{n \in \mathbf{Z} : \bar{n} = \bar{0}\} \\ &= 6\mathbf{Z} \end{aligned}$$

dir ve çekirdekte sonsuz çoklukta eleman olduğu görülmektedir.

Not: *Süre 70 dakikadır. Başarılar.* ***İNC***