MAT 3013 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ I FİNAL SORULARI

Ad-Soyad:.. **29.01.2004**

No :..

Soru 1) p, p+8 ve p+22 sayılarının hepsini asal yapan bir p pozitif tamsayısının bulunmadığını gösteriniz.

p asal değilse ispatlayacak bir şey yoktur. O halde p nin asal olduğunu kabul edebiliriz. Eğer p = 2 ise p+8 = 10; p = 3 ise p+22 = 25 olup asal değildir. Bu sebeple p > 3 alabiliriz.

Bu durumda p nin 3 ile bölümünden kalan ya 1 ya da 2 dir.

İlk durumda $p \equiv 1 \ (3)$ olup $p+8 \equiv 9 \equiv 0 \ (3)$ olacağından p+8, 3 ile bölünebilirdir ve asal olamaz.

İkinci durumda $p \equiv 2 \ (3)$ olup bu kez de $p+22 \equiv 24 \equiv 0 \ (3)$ olacağından p+22 asal olmayacaktır.

Soru 2) p tek asal sayı olsun. -1, Q_p nin bir elemanı ise p nin 4 modunda bire denk olduğunu gösteriniz.

$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \quad (p)$ olduğundan $-1 \in Q_p$ ise $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$ dir. Yani $\frac{p-1}{2}$ nin çift olması gerekir. Yani k bir tamsayı olmak üzere $\frac{p-1}{2} = 2k$, ve böylece de p = 1 + 4k veya denk olarak $p \equiv 1 \ (4)$ elde edilir.

Soru 3) 11 modundaki tüm ilkel kökleri bulunuz.

Önce 2 yi deneyelim. $\varphi(11) = 10$ olduğunu hatırlayalım.

$2^1=2, 2^2=4, 2^3=8, 2^4=5, 2^5=10, 2^6=9, 2^7=7, 2^8=3, 2^9=6, 2^{10}=1.$

Dolayısıyla 2, mertebesi 10 olan bir eleman olduğundan bir ilkel köktür.

Şimdi diğer sayıları deneyelim.

$3^1=3, 3^2=9, 3^3=5, 3^4=4, 3^5=1;$

$4^1=4, 4^2=5, 4^3=9, 4^4=3, 4^5=1;$

$5^1=5, 5^2=3, 5^3=4, 5^4=9, 5^5=1;$

$6^1=6, 6^2=3, 6^3=7, 6^4=9, 6^5=10, 6^6=5, 6^7=8, 6^8= 4, 6^9=2, 6^{10}=1;$

$7^1=7, 7^2=5, 7^3=2, 7^4=3, 7^5=10, 7^6=4, 7^7=6, 7^8=9, 7^9=8, 7^{10}=1;$

$8^1=8, 8^2=9, 8^3=6, 8^4=4, 8^5=10, 8^6=3, 8^7=2, 8^8=5, 8^9=7, 8^{10}=1;$

$9^1=9, 9^2=4, 9^3=3, 9^4=5, 9^5=1;$

$10^1=10, 10^2=1$

olup diğer ilkel kökler 6, 7 ve 8 dir.

Soru 4) p ve q farklı asallar olmak üzere n = p.q şeklinde yazılabilen tüm mükemmel sayıları belirleyiniz.

n mükemmel ise t(n) = 2n olmalıdır. p ile q farklı asallar olduğundan

$t(n) = t(p.q) = t(p).t(q) = (1+p)(1+q) = 1+ p + q + pq = 2pq$

veya

$pq = p + q + 1$

yazabiliriz. Buradan

$p = (q+1)/(q-1)$

buluruz. q = 2 için p = 3, q = 3 için p = 2 asalları dışında çözüm olmadığı açıktır.

Soru 5) $143x \equiv 17 \ (315)$ kongrüansının genel çözümünü bulunuz.

$315 = 3^2.5.7$ olduğundan verilen kongrüansı aşağıdaki üç kongrüanstan oluşan sisteme dönüştürebiliriz.

$143x \equiv 17 \ (9)$

$143x \equiv 17 \ (5)$

$143x \equiv 17 \ (7)$

Bu kongrüanslar düzenlendiğinde

$8x \equiv 8 \ (9)$

$3x \equiv 12 \ (5)$

$3x \equiv 3 \ (7)$

elde edilir. Denk olarak

$x \equiv 1 \ (9)$

$x \equiv 4 \ (5)$

$x \equiv 1 \ (7)$

yazabiliriz. Çinlilerin kalan teoremi kullanılarak $x = 1+9k \equiv 4 \ (5)$ ve $4k \equiv 8 \ (5)$ den $k \equiv 2 \ (5)$ veya k = 2+5t elde ederiz. Böylece x = 1+9(2+5t) = 19+45t buluruz. Son kongrüanstan $19+45t \equiv 1 \ (7)$ veya $3t \equiv 3 \ (7)$ elde edilir ve böylece $t \equiv 1 \ (7)$ ya da t = 1+7m yazılabilir. Sonuç olarak x = 19+45(1+7m) = 64+315m veya $x \equiv 64 \ (315)$ bulunur.

Not: *Süre 80 dakikadır. Başarılar.* ***İNC***