MAT 4061 GALOIS TEORİSİ FİNAL SORULARI

Ad-Soyad:.. **28.01.2004**

No :..

Soru 1) $\sqrt{1+\sqrt{4i}}$ sayısının Q rasyonel sayılar kümesi üzerindeki minimal polinomunu bulunuz.

$x = \sqrt{1+\sqrt{4i}}$ olsun. $x^2 = 1+\sqrt{4i}$ olup $x^2-1 = \sqrt{4i}$ ve $(x^2-1)^2 = 4i$ yazılır. Parantez açılınca $x^4-2x^2+1 = 4i$ elde edilir. Burada i sayısı Q da kalmadığından yine kare alınarak

$$x^8-4x^6+6x^4-4x^2+17 = 0$$

minimal polinomu bulunur.

Soru 2) q elemanlı bir cismin n-inci dereceden bir genişlemesinde kaç eleman bulunur? Gösteriniz.

E yi F üzerinde bir vektör uzayı olarak düşünelim. $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ E için F üzerinde bir taban olsun. O halde E deki her β elemanının $b_i \in F$ olmak üzere bir tek şekilde

$$\beta = b_0 + b_1\alpha + \ldots + b_{n-1}\alpha^{n-1}$$

olarak ifade edilebileceğini görmüştük. Her bir b_i, F deki q elemandan biri olarak seçileceğinden ve n tane b_i bulunduğundan bu şekilde oluşturulabilecek β elemanlarının toplam sayısı q^n dir.

Soru 3) Karakteristiği $p>0$ olan bir F cisminde her $a, b \in F$ için $(a+b)^p = a^p+b^p$ olduğunu gösteriniz.

Binom teoreminden

$$(a+b)^p = a^p+\sum_{i=1}^{p-1}\binom{p}{i}a^i b^{p-i}+b^p$$

yazabiliriz. $1 \le i \le p-1$ için $\binom{p}{i} = 0$ olduğundan ispat açıktır.

Soru 4) 9 elemanlı bir cismin elemanlarını belirleyiniz.

Bu cisim $GF(3^2)$ dir. Elemanlarıda $x^9-x = 0$ polinomunun farklı 9 köküdür. Bu polinom çarpanlara ayrıldığında

$$x^9-x = x(x^8-1) = x(x^4-1)(x^4+1) = x(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$$

elde edilir. Bu çarpanların kökleride 0, 1, -1, i, -i, $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ ve $-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$ dir.

Soru 5) $x^4 - 15x^2 - 20x - 6$ polinomuna karşılık gelen üçüncü dereceden polinomu elde ediniz.

$$2m = k^2-15-20/k$$
$$2l = k^2-15+20/k$$

denklemlerinden

$$k^6 - 30k^4 + (225 + 24)k^2 - 400 = 0$$

denklemi elde edilir. Burada $k^2 = t$ dönüşümü yapıldığında

$$t^3 - 30t^2 + (225 + 24)t - 400 = 0$$

bulunur.

Not: *Süre 75 dakikadır. Başarılar.* **İNC**