MAT 3013 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ I 2.ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:.. **15.12.2003**

No :..

Soru 1) $x^3 + x^2 - x + 1$ polinomunun tamsayı köklerinin var olup olmadığını araştırınız.

n = 2 için mod 2 de 0 ın çözüm olmadığı açıktır. Ancak 1, bir çözüm olduğundan n = 3 ü denemeliyiz. 0, 1 ve 2 çözüm olmadığından verilen polinomun $\mathbf{Z}_3$ de çözümü yoktur. Dolayısıyla böyle bir n bulunabildiğinden **Z** de de çözüm yoktur.

Soru 2) n, 11 ile aralarında asal bir sayı olmak üzere $n^{10} - 1$ farkının 11 ile bölündüğünü gösteriniz.

(n, 11) = 1 olduğundan Fermat (veya Euler) teoremi gereği $n^{10} \equiv 1 \ (11)$ dir. Bu yüzden denklik tanımı gereği $n^{10} - 1$ farkı 11 ile bölünebilirdir.

Soru 3) $x^2 \equiv 1 \ (3)$ ve $x \equiv 2 \ (4)$ kongrüans sisteminin genel çözümünü bulunuz.

$x^2 \equiv 1 \ (3)$ ise $x^2 \equiv 4 \ (3)$ olup $x \equiv \pm 2 \ (3)$ veya denk olarak $x \equiv 2 \ (3)$ veya $x \equiv 1 \ (3)$ elde ederiz. İlk olarak $x \equiv 2 \ (3)$ olsun. Aynı zamanda $x \equiv 2 \ (4)$ de olduğundan Çinlilerin kalan teoremini kullanarak 12 modunda bir çözüm bulmalıyız. Birinci kongrüanstan x = 2 + 3k, k tamsayı, yazarsak ve bunu ikincide yerine koyarsak

$$2 + 3k \equiv 2 \ (4)$$

ve böylece de $3k \equiv 0 \ (4)$ ve de (3,4) = 1 olduğundan denk olarak $k \equiv 0 \ (4)$ buluruz. k = 4m, m tamsayı, dersek

$$x = 2 + 12m$$

yani $x \equiv 2 \ (12)$ ortak çözümü bulunur.
İkinci ihtimali ele alalım. $x \equiv 1 \ (3)$ olsun. Aynı zamanda $x \equiv 2 \ (4)$ de olduğundan x = 1 + 3k, k tamsayı, yazarsak ve bunu ikincide yerine koyarsak

$$1 + 3k \equiv 2 \ (4)$$

ve böylece de $3k \equiv 1 \equiv 9 \ (4)$ ve de (3,4) = 1 olduğundan denk olarak $k \equiv 3 \ (4)$ buluruz. k = 3 + 4m, m tamsayı, dersek

$$x = 10 + 12m$$

yani $x \equiv 10 \ (12)$ ortak çözümü bulunur. Sonuç olarak verilen sistemin 12 modundaki çözümleri 2 ve 10 denklik sınıflarındaki tüm tamsayılardır.

Soru 4) $2^n + 1$ asal ise n nin ikinin bir kuvveti olduğunu gösteriniz.

Tersine n, ikinin bir kuvveti olmasın. O zaman q bir tek sayı olmak üzere $n = 2^k q$ şeklindedir. Bu durumda

$$2^n + 1 = 2^{2^k q} + 1 = \left(2^{2^k}\right)^q + 1 = (2^{2k} + 1)(\dots)$$

olarak çarpanlarına ayrılabilir. Bu çarpanların ikisi de 1 den büyük olduğundan bu durum $2^n + 1$ sayısının asal olduğu varsayımı ile çelişir. O halde n ikinin bir kuvvetidir.

Soru 5) $5x \equiv 13 \ (693)$ kongrüansının genel çözümünü bulunuz.

$693 = 3^2.7.11$ olduğundan verilen kongrüansı

$$5x \equiv 13 \ (9)$$
$$5x \equiv 13 \ (7)$$
$$5x \equiv 13 \ (11)$$

sistemi olarak düşünebiliriz. Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$5x \equiv -5 \ (9)$$
$$5x \equiv 20 \ (7)$$
$$5x \equiv 35 \ (11)$$

ve böylece

$$x \equiv -1 \ (9)$$
$$x \equiv 4 \ (7)$$
$$x \equiv 7 \ (11)$$

sistemi elde edilir. x = -1 + 9k, k tamsayı, yazıldığında

$$-1 + 9k \equiv 4 \ (7) \text{ ve } 2k \equiv 5 \equiv 12 \ (7)$$

elde edilir. Buradan $k \equiv 6 \ (7)$ bulunur. t bir tamsayı olmak üzere k = 6 + 7t yazarsak x = -1 + 9(6 + 7t) = 53 + 63t buluruz. Bu değer son kongrüansta yerine konulduğunda $53 + 63t \equiv 7 \ (11)$ ve böylece $-3t \equiv 9 \ (11)$ buluruz. Sonuçta elde edilen $t \equiv -3 \equiv 8 \ (11)$ değeri m bir tamsayı olmak üzere t = 8 + 11m olarak yazılırsa aranan x çözümü

$$x = 53 + 63(8 + 11m) = 557 + 693m$$

olarak bulunur ki bu da

$$x \equiv 557 \ (693)$$

demektir.

Not: *Süre 70 dakikadır. Başarılar.* **İNC**