

MAT304 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ II 1. ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:.....

17.04.2003

No :.....

Soru 1) G ve G' iki grup, $f: G \rightarrow G'$ bir epimorfizm olsun. $g' \in G'$ olmak üzere $A = \{x \in G : f(x) = g'\}$ kümesinin ne zaman boşküme olacağını belirleyiniz. Çekirdek 24 elemanlı ise A kümesinin eleman sayısı ne olabilir? Açıklayınız. (20 puan)

f epimorfizm olduğundan örtendir. Bu yüzden A kümesi hiçbir zaman boşküme olamaz. Teorem gereği, A nın eleman sayısı çekirdeğin eleman sayısı ile aynıdır. O halde A nın da eleman sayısı 24 olur.

Soru 2) G ve G' iki grup, $f: G \rightarrow G'$ bir monomorfizm olsun. G ve G' gruplarının altgrup sayıları hakkında ne söylenebilir? Açıklayınız. (20 puan)

f monomorfizm olduğundan birebirdir. Teorem gereği G nin çekirdeği içeren altgruplarının kümesiyle G' nün tüm altgruplarının kümesi arasında birebir eşleme vardır. Birebirlik gereği çekirdek tek elemanlıdır. O halde iki grubun altgrup sayıları aynıdır.

Soru 3) Kamutatör elemanlarını göz önüne alarak $(Z,+)$ grubunun kamutatör altgrubunu hesaplayınız. (20 puan)

$(Z,+)$ değişmeli grup olduğundan herhangi bir kamutatör elemanı $[a,b] = aba^{-1}b^{-1} = aa^{-1}bb^{-1} = e$ şeklindedir. O halde kamutatör altgrubu sadece etkisiz elemandan (sıfır) oluşan aşikâr gruptur.

Soru 4) G bir grup ve $a, b, c; G$ nin üç elemanı olsun. $a^{12} = b^8 = c^6 = e$ ise abc elemanının mertebesi hakkında ne söylenebilir? Açıklayınız. (20 puan)

$(abc)^n = abcabcabc \dots abc$ şeklinde yazılabileceğinden, G grubu değişmeli değilken bu çarpımın etkisiz eleman olması mümkün değildir. Yani sonsuz mertebelidir. G değişmeli iken abc nin mertebesi 24 dür. Çünkü

$$(abc)^{24} = a^{24}b^{24}c^{24}$$
$$= (a^{12})^2(b^8)^3(c^6)^4$$
$$= e$$

dir.

Soru 5) S_4 ve A_4 gruplarının eleman sayıları nedir? A_4 ün S_4 de kaç koseti vardır? S_4 de olup A_4 de olmayan iki permütasyon yazınız. S_4/A_4 bölüm grubunun eleman sayısını bulunuz. (20 puan)

$|S_4| = 4! = 24$, $|A_4| = 4!/2 = 12$ elemanlıdır. Koset sayısı 2 dir. Yani indeks 2 dir. Bu aynı zamanda bölüm grubunun eleman sayısıdır. A_4 de kalan permütasyonlar çift permütasyonlar olduğundan istenenler tek permütasyonlardır. Örneğin,

$$f = (1\ 3)(1\ 4)(1\ 2) = (1\ 2\ 4\ 3)$$

ve

$$g = (1\ 2)(1\ 3)(1\ 4) = (1\ 4\ 3\ 2)$$

gibi.

Not: Süre 60 dakikadır. Başarılar. **İNC**