

# MAT 4061 GALOIS TEORİSİ FINAL SORULARI

Ad-Soyad:.....

23.01.2003

No :.....

**Soru 1)** Bir çeşitkenar çokgenin simetri grubunu açıklayarak belirtiniz. (20 puan)

Çeşitkenar çokgende hiçbir simetri eksenini olmadığından etkisiz eleman tek simetrisidir. Dolayısıyla simetri grubu  $C_1 \cong \{e\}$  dir.

**Soru 2)** Birim nedir? Tanımlayınız ve  $\mathbb{Q}$  daki birimleri belirleyiniz. (20 puan)

$u$ ,  $R$  halkasının bir elemanı olsun. Eğer  $uv = 1$  olacak şekilde bir  $v \in R$  elemanı varsa  $u$  ya  $R$  de bir birim denilir.  $\mathbb{Q}$  bir cisim olduğundan  $0$  dışındaki tüm elemanlar birer birim olur.

**Soru 3)** Bir halkada  $n$ -inci dereceden bir polinomun kaç kökü olabilir. Örnek veriniz. (20 puan)

Halka aynı zamanda bir cisim ise, polinomun derecesi  $n$  olduğunda tam  $n$  tane kökü vardır. Örneğin  $R$  reel sayılar cisminde  $n$ -inci dereceden bir polinomun en çok  $n$  kökü olduğu cebirin temel teoremi olarak bilinir.

Halka cisim özelliklerine sahip değilse kök sayısı  $n$  den fazla olabilir. Örneğin  $Z_{12}$  halkasında  $x^2-1 = 0$  polinomunun  $1, 5, 7$  ve  $11$  olmak üzere dört kökü vardır.

**Soru 4)**  $F$  bir cisim ise  $F[x]$  teki her bir idealin bir temel ideal olduğunu gösteriniz. (20 puan)

$I$ ,  $F[x]$  te bir ideal olsun.  $I = \{0\}$  ise  $I = (0)$  dir. Yani  $0$  ile üretilen temel idealdir. Eğer  $I \neq \{0\}$  ise,  $I$  da derecesi en küçük olan bir  $m(x)$  polinomu seçelim.  $I = (m(x))$  olduğunu göstermek istiyoruz.  $(m(x)) \subset I$  olduğu açıktır. Tersine  $I$  da bir  $f(x)$  elemanı alalım. Bölme algoritması gereği,  $r(x) = 0$  veya  $\partial(r) < \partial(m)$  olmak üzere 
$$f(x) = q(x)m(x) + r(x)$$

olacak şekilde  $q(x)$  ve  $r(x)$  polinomları vardır.  $r(x) = f(x) - q(x)m(x) \in I$  dir.  $r(x) \neq 0$  ise, bu durumda  $m(x)$  in  $I$  daki en küçük dereceli polinom oluşu ile çelişiriz.  $0$  halde  $r(x) = 0$  dir ve  $f(x) = q(x)m(x) \in (m(x))$  elde ederiz.

**Soru 5)** Has ideali tanımlayınız. Bir  $R$  halkasının bölüm halkasının nasıl oluşturulacağını şartlarını ve üzerindeki işlemi açıklayınız. (20 puan)

$R$  halkasında  $I \neq R$  ise  $I$  ya bir *has ideal* denilir.  $R/I$  toplamsal değişmeli grubuna  $(r+I)(r'+I) = rr'+I$  çarpma işlemi eklenirse bir halka haline gelir.  $R/I$  değişmeli grubu, bu çarpma işlemiyle birlikte bir halkadır ve  $R$  nin  $I$  ile bölüm halkası adını alır.

**Not:** Süre 60 dakikadır. Başarılar. **İNC**