

MAT 3035 METRİK UZAYLAR II FİNAL SORULARI

Ad-Soyad:.....CEVAP ANAHTARI.....

22.01.2003

No :.....

Soru 1) $C[0,5]$ kümesi üzerinde

$$d_{\infty}(f,g) = \sup \{ |f(x) - g(x)| : x \in [0,5] \}$$

metriği tanımlanıyor. $f(x) = x^2 - x - 1$ ve $g(x) = 3x + 4$ fonksiyonları için $d_{\infty}(f,g)$ değerini hesaplayınız. (20 puan)

$$\begin{aligned} d_{\infty}(f,g) &= \sup \{ |x^2 - x - 1 - 3x - 4| : x \in [0,5] \} \\ &= \sup \{ |x^2 - 4x - 5| : x \in [0,5] \} \end{aligned}$$

olduğundan $h(x) = x^2 - 4x - 5$ fonksiyonunun türevi olan $2x - 4$ ün sıfıra eşitlenmesiyle $x=2$ noktasında bir ekstremum değer olduğu bulunur. Bu değer 9 olduğunu hesaplamak zor değildir.

Soru 2) Bir X metrik uzayında keyfi sayıda kapalı kümenin birleşimi hakkında ne söylenebilir? Örnek veriniz. (20 puan)

Açık ta olabilir, kapalı da.

Kapalı olabileceğine birçok örnek verilebilir. Reel alışılmış uzayda $K_n = [3, 4 - \frac{1}{n}]$ kapalı kümelerinin birleşimi $[3, 4]$ olup kapalıdır. Ancak yine aynı uzayda $K_n = [-n, n]$ kapalı kümelerinin birleşimi \mathbf{R} olup açıktır.

Soru 3) Ayrık metrik uzayda her noktanın kendisinin bir komşuluğu olduğunu gösteriniz. (20 puan)

$x \in X$ olsun. seçersek x in ε komşuluğu

$D(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(y,x) < \varepsilon\}$ olur. $\varepsilon \leq 1$ olduğunda bu küme denk olarak $D(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(y,x) < 1\}$ şekline dönüşür. Ayrık metriğin tanımı gereği

$D(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(y,x) = 0\}$ olur. Buradan da

$D(x, \varepsilon) = \{y \in X : y = x\} = \{x\}$ bulunur.

Soru 4) $d: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $d(x,y) = 3|x-y|/2$ fonksiyonunun bir metrik olduğunu gösteriniz.

M1) $d(x,y) = 3|x-y|/2 \geq 0$ dir.

M2) $d(x,y) = 3|x-y|/2 = 0 \Leftrightarrow |x-y| = 0 \Leftrightarrow x-y = 0 \Leftrightarrow x=y$ dir.

M3) $d(x,y) = 3|x-y|/2 = 3|y-x|/2 = d(y,x)$ dir.

M4) $d(x,y) = 3|x-y|/2 \leq (3/2) \cdot (|x-z| + |z-y|)$
 $= 3|x-z|/2 + 3|z-y|/2 = d(x,z) + d(z,y)$ elde edilir.

Soru 5) 4. sorudaki metriğe göre aşağıdakileri cevaplayınız. (20 puan)

i) $d(3,5) = \dots\dots\dots 3|3-5|/2 = 3 \dots\dots\dots$

ii) $D(2,4) = \dots\dots\dots (-2/3, 14/3) \dots\dots\dots$

iii) $D[0,1] = \dots\dots\dots [-2/3, 2/3] \dots\dots\dots$

iv) $A = \{3\} \cup [4,7)$ kümesinin çapı $d(A) = \dots\dots 6 \dots\dots$