MAT 3003 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ I FİNAL SORULARI

Ad-Soyad:.. **21.01.2003**

No :..

Soru 1) 5 modunda 1 kalanını veren her asal sayının (11, 31, 41, vs. gibi) aslında k bir tamsayı olmak üzere 10k+1 şeklinde olması gerektiğini açıklayınız. (20 puan)

p = 5n+1 olsun. n tek ise p çift olacağından n çift olmalıdır. n = 2k, $k \in \mathbf{Z}$ denirse $p = 5 \cdot 2k+1 = 10k+1$ olur.

Soru 2) $n \in \mathbf{N}$ olmak üzere hiçbir tamsayının karesinin 7n+5 şeklinde olamayacağını gösteriniz. (20 puan)

Eğer $7n + 5 = x^2$ olacak şekilde bir x tamsayısı bulunabilseydi, bu durumda

$$x^2 \equiv 5 \quad (7)$$

kongrüansının bir çözümü de var olurdu. Halbuki 5, $Q_7 = \{1, 2, 4\}$ ün bir elemanı değildir. Yani 5, 7 modunda bir ikinci dereceden kalan değildir.

Soru 3) $\varphi(mn) = \varphi(n)$ olacak şekildeki tüm m, n tamsayı çiftlerini belirleyiniz. (20 puan)

(m,n) = 1 ise $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n) = \varphi(n)$ olması $\varphi(m) = 1$ iken mümkündür. Bu da m = 1 veya 2 iken söz konusudur. Yani verilen eşitlik n herhangi bir doğal sayı olmak üzere (1,n) ve (2,2n+1) ikilileri için sağlanır.

(m,n) > 1 ise $\varphi(mn) = d.\frac{\varphi(m)\varphi(n)}{\varphi(d)} = \varphi(n)$ olması $\frac{\varphi(d)}{\varphi(m)} = d > 1$ olmasıyla mümkündür. d, m den büyük olmadığından $\varphi(d)$, $\varphi(m)$ den büyük olamaz ve bu durum mümkün değildir. Yani aranan ikililer yukarıdaki iki çeşitten ibarettir.

Soru 4) p ve q, 4 modunda bire denk olan iki farklı asal sayı olsun. $x^2 \equiv p$ (q) kongrüansının çözümünün olması için gerek ve yeter şartın $x^2 \equiv q$ (p) kongrüansının çözümünün olması olduğunu gösteriniz. (20 puan)

m ve n tamsayılar olmak üzere, p = 4m+1 ve q = 4n+1 olsun.

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)(-1)^{2m2n}$$

$$= \left(\frac{q}{p}\right)$$

olacağından, $x^2 \equiv p$ (q) ve $x^2 \equiv q$ (p) denklemlerinin ya ikisinin de çözümü vardır, ya da ikisinin de çözümü yoktur.

Soru 5) x Ξ a (m) ve x Ξ a (n) kongrüans sisteminin çözümünü belirleyiniz. Çözüm hangi moddadır? (20 puan)

$x \equiv a$ (m) ise bir k tamsayısı için x=a+mk yazabiliriz. Bunu ikinci kongrüansta yerine koyarsak $a+mk \equiv a$ (n) veya denk olarak $mk \equiv 0$ (n) elde ederiz. Buradan $k \equiv 0 \left(\frac{n}{(m,n)}\right)$ elde edilir. Yani bir t tamsayısı için $k = \frac{nt}{(m,n)}$ şeklindedir. Bu değeri x=a+mk eşitliğinde yerine koyarsak $x = a + \frac{mnt}{(m,n)}$ elde ederiz. $\frac{mn}{(m,n)} = [m,n]$ olduğu hatırlanırsa son olarak x=a+[m,n].t ya da denk olarak $x \equiv a$ ([m,n]) elde ederiz. Yani verilen sistemin çözümü [m,n] modunda a sayısının denklik sınıfındaki tüm tamsayılardır.

Not: *Süre 60 dakikadır. Başarılar.* **İNC**