MAT 3003 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ I 2.ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:.....CEVAP ANAHTARI..... **12.12.2002**

No :.....

Soru 1) p > 4 olsun. p nin asal olması için gerek ve yeter şartın $6(p-4)! \equiv 1 \ (p)$ olması olduğunu gösteriniz. (20 puan)

Wilson teoremi gereği p nin asal olma şartı $(p-1)! \equiv -1 \ (p)$ olmasıdır. Denk olarak $(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)! \equiv -1 \ (p)$ yazabiliriz. Bu da denk olarak $(-1)(-2)(-3)(p-4)! \equiv -1 \ (p)$ veya $6(p-4)! \equiv 1 \ (p)$ olması şeklinde ifade edilebilir.

Soru 2) m birleşik bir sayı ise 2^m-1 sayısı asal olabilir mi? Açıklayınız. (20 puan)

m birleşik ise $1 < a, b < m$ olmak üzere $m = a.b$ şeklinde yazılabilir. O halde

$$2^m - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1 = (2^a-1)[(2^a)^{b-1}+(2^a)^{b-2}+ \ldots +2^a+1]$$

şeklinde birden büyük iki sayının çarpımı olarak yazılabileceğinden birleşiktir.

Soru 3) Her n tamsayısı için (a,b) = (a,b+na) olduğunu gösteriniz. (20 puan)

d = (a,b) diyelim. d, a ve b yi bölen en büyük tamsayıdır. O halde d, b+na lineer toplamını da böler. Yani d, a ile b + na sayılarının bir ortak bölenidir. Şimdi c, a ile b + na sayılarının bir başka ortak böleni olsun. o zaman c, bu iki sayının lineer toplamı olan $(b + na) + (-n)a = b$ yi de bölecektir. Yani c, aynı zamanda a ile b nin bir ortak bölenidir. d, a ile b nin obebi olduğundan c|d olur. Yani d aynı zamanda a ile b + na sayılarının da obebidir.

Tersine d = (a, b + na) olsun. Yani d, a ile b + na sayılarını bölen en büyük tamsayı olsun. Benzer şekilde d, bu iki sayının lineer toplamı olan $(b + na) + (-n)a = b$ sayısını da böler. Bu da d nin, a ve b nin bir ortak böleni olduğunu gösterir. İkinci ve son olarak c nin a ve b sayılarının bir başka ortak böleni olduğunu varsayalım. c aynı zamanda a ile b + na sayılarının da bir ortak böleni olacaktır. Ancak d bu iki sayının obebi olarak seçildiğinden, c|d olacaktır. Yani c, a ile b nin de obebidir.

Soru 4) a ile b sıfırdan farklı iki tamsayı ise

$$ax \equiv a \ (ab)$$
$$bx \equiv b \ (ab)$$

kongrüans sistemini çözünüz. (20 puan)

Birinci kongrüansı a, ikinciyi b ile bölersek

$x \equiv 1 \ (b)$ ve $x \equiv 1 \ (a)$

kongrüanslarını elde ederiz. Birinciden t bir tamsayı olmak üzere $x = 1 + bt$ yazılıp ikincide yerine konulursa $1 + bt \equiv 1 \ (a)$ kongrüansı elde edilir. Denk olarak $bt \equiv 0 \ (a)$ yazabiliriz. Bu da b ile bölündüğünde

$$t \equiv 0 \left(\frac{a}{(a,b)}\right) \text{ veya denk olarak } t = \left(\frac{a}{(a,b)}\right)k, \ k \in \mathbf{Z}$$

halini alır ki bu değer yukarıda yerine yazılınca $x = 1 + \frac{ab}{(a,b)}k$ veya $x = 1 + [a,b]k$ elde edilir. Yani aranan ortak çözüm, $x \equiv 1 \ ([a,b])$ şeklindedir.

Soru 5) $abx \equiv a \ (2)$ kongrüansının çözüm şartını a ve b ye bağlı olarak belirleyiniz ve çözüm sayısını bulunuz. (20 puan)

$abx \equiv a \ (2)$ kongrüansının çözüm şartı $(ab,2)|a$ şeklindedir. Burada iki hal söz konusudur. a çift ise $(ab,2) = 2$ olur ve $2|a$ olduğundan çözüm mevcuttur ve obeb 2 olduğundan 2 tanedir. a tek ise b için iki durum söz konusudur. b de tek ise ab tek olup $(ab,2) = 1|2$ olur ve çözüm şartı sağlanır. Bu durumda bir tek çözüm vardır. Ancak b çift ise $(ab,2) = 2$ olup 2, a yı bölmeyeceğinden çözüm olmayacaktır.

Not: *Süre 60 dakikadır. Başarılar.* ***İNC***