

MAT 4061 GALOIS TEORİSİ 1. ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:.....

18.11.2002

No :.....

Soru 1) Ortogonal dönüşümü tanımlayınız.
 $f : C \rightarrow C$, 150 derecelik bir dönme dönüşümünü matematiksel olarak ifade ediniz. (20 puan)

Eğer bir $\sigma : R^2 \rightarrow R^2$ lineer dönüşümü uzaklıkları koruyorsa; yani U ve V noktaları arasındaki uzaklık $|U-V|$ ile gösterilmek üzere $|\sigma(U) - \sigma(V)| = |U-V|$ oluyorsa, σ ya *ortogonal dönüşüm* denilir.

150 derecelik bir dönme dönüşümü $\rho : re^{i\theta} \rightarrow re^{i(\theta+5\pi/6)}$ şeklindedir.

Soru 2) İkizkenar üçgenin simetri grubunu elde ediniz. (20 puan)

Δ bir ikizkenar üçgen olsun. $|AC| = |AB|$ olduğunu kabul edelim. A köşesinden geçen yükseklik etrafındaki yansıma $\Sigma(\Delta)$ da kalmaktadır. Bu özdeşlikten farklı olan tek simetridir. Çünkü her bir σ simetrisi, A açısı B ve C açılarından farklı olduğu için A yı sabit bırakmak zorundadır. Böylece $\Sigma(\Delta) \cong Z_2$ dir.

Soru 3) Aşağıdaki kavramları tanımlayınız. (20 puan)

Halka homomorfizmi: R ve S herhangi iki halka olsun. Her $r, r' \in R$ için bir $\varphi : R \rightarrow S$ fonksiyonu

$$\varphi(r + r') = \varphi(r) + \varphi(r');$$

$$\varphi(r \cdot r') = \varphi(r) \cdot \varphi(r');$$

$$\varphi(1) = 1$$

şartlarını sağlıyorsa φ ye bir *halka homomorfizmi* (ya da *halka dönüşümü*) denilir.

Bölüm halkası: I, R halkasında bir has ideal olsun. Bu taktirde R/I toplamsal değişmeli grubuna çarpma işlemi eklenerek, bir halka haline getirilir. Bu durumda R/I ya I modunda R nin *bölüm halkası* denir.

Soru 4) Bir R halkasında sadeleştirme kuralları gerçekleşiyorsa R nin bir tamlık bölgesi olacağını gösteriniz. (20 puan)

R de sadeleştirme kuralı geçerli olsun. R de sıfırdan farklı r ve a elemanlarının $r \cdot a = 0$ olacak şekilde bulunduğunu varsayalım. Bu durumda

$$r \cdot a = 0 = r \cdot 0$$

eşitliğinden $a = 0$ bulunur ki bu bir çelişkidir.

Soru 5) Dördüncü dereceden bir polinomun kökler toplamını ve çarpımını elde ediniz. (20 puan)

$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ polinomunu alalım. Bu polinomun muhtemel kökleri x_1, x_2, x_3 ve x_4 ise

$$\begin{aligned} P(x) &= a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) \\ &= a(x^2 - (x_1+x_2)x + x_1x_2) \cdot (x^2 - (x_3+x_4)x + x_3x_4) \\ &= a(x^4 - (x_1+x_2+x_3+x_4)x^3 + \\ &\quad (x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)x^2 + \\ &\quad (x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4)x + \\ &\quad x_1x_2x_3x_4) \\ &= 0 \end{aligned}$$

yazılabilir. İki ifade eşitlenerek

$$x_1+x_2+x_3+x_4 = -b/a$$

ve

$$x_1x_2x_3x_4 = e/a$$

elde edilir.

Not: Süre 60 dakikadır. Başarılar. **İNC**