MAT 3003 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ I 1.ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:.. **14.11.2002**

No :..

Soru 1) 3k+2 şeklindeki her doğal sayının aynı biçimde bir asal çarpanının olduğunu gösteriniz. (20 puan)

$$a = 3k+2 = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$$

diyelim. p_i asallarından hiçbiri 3 olamaz. Çünkü a, 3 ile bölününce 2 kalanını vermektedir. O halde her bir p_i asalı s bir doğal sayı olmak üzere ya 3s+1 ya da 3s+2 biçimindedir. Eğer p_i asallarının her biri 3s+1 şeklinde ise a sayısı da aynı biçimde olacaktır. O halde en az bir p_i çarpanı 3s+2 şeklinde olmalıdır.

Soru 2) p>2 sayısı iki tam karenin toplamı şeklinde ifade edilebilen bir asal sayı ise $\varphi(p)$ nin 4 ün katı olduğunu gösteriniz. (20 puan)

İki tam karenin toplamı 4 modunda 0, 1 veya 2 ye denk olabileceğinden bir p tek asal sayısının iki tam kare toplamı olması durumunda 1 e denk olacağı açıktır. Yani $p \equiv 1 \quad (4)$ veya denk olarak k bir tamsayı olmak üzere p = 1+4k şeklinde yazılabilir. $\varphi(p) = p-1$ olacağından $\varphi(p) = 1+4k-1 = 4k$ olur ki bu da istenilen sonuçtur.

Soru 3) a, b, c, d $\in Z\backslash\{0\}$ olmak üzere abcx+bcdy = 1 Diophant denkleminin çözümünün olması için gerekli şartları belirleyiniz. (20 puan)

Verilen denklemin çözümünün olması için gerek ve yeter şartın katsayıların obebinin eşitliğin sağındaki sayıyı bölmesi olduğunu biliyoruz. Buna göre çözümün varlığı için (abc,bcd) = e|1 olmalıdır. bc(a,d) = e|1 olmalıdır. Bu da, b ve c birer tamsayı olduğundan, b = c = 1 veya b = c = -1 olması ve (a,d) = 1 olması ile mümkündür.

Soru 4) Kongrüanslardan faydalanarak 11 ile bölünebilme için bir kural bulunuz. (20 puan)

$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \in N$ olsun.
$f(x) = a_k \cdot x^k + a_{k-1} \cdot x^{k-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$
tanımlayalım. $-1 \equiv 10 \quad (11)$ olduğundan

$$f(-1) \equiv f(10) \quad (11)$$

olur. Yani

$$n = f(10) \text{ ile } f(-1) = \pm(a_k - a_{k-1} + \ldots - a_1 + a_0)$$

sayılarının ya ikisi de 11 ile bölünebilir ya da ikisi de bölünemezdir. Bu ise her sayının 11 ile bölünebilmesinin tamamen basamaklarının alterne toplamının 11 in katı olması ile mümkün olduğunu gösterir.

Soru 5) Aşağıda verilen kongrüans sistemini çözünüz. (20 puan)

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv 10 \quad (27) \\ x \equiv 2 \quad (25) \\ x \equiv 3 \quad (8) \end{array}\right\}$$

x = 10+27a, $a \in Z$ yazılır ve bu ikinci kongrüansta yerine konulursa $10+27a \equiv 2 \quad (25)$ elde edilir. Buradan $2a \equiv -8 \quad (25)$ veya $a \equiv -4 \equiv 21 \quad (25)$ bulunur ki bunu da b tamsayı olmak üzere a = 21+25b olarak ifade edebiliriz. O halde x = 10+27(21+25b) = 577+675b bulunur. Bu son kongrüansta yerine konulursa, $577+675b \equiv 3 \quad (8)$ ve buradan $3b \equiv 2 \equiv 18 \quad (8)$ bulunur ki bu da $b \equiv 6 \quad (8)$ olduğu sonucunu verir. Bu durumda c bir tamsayı olmak üzere b = 6+8c yazılırsa x = 577+675(6+8c) = 4627+5400c elde ederiz. bu da denk olarak $x \equiv 4627 \quad (5400)$ sonucunu verir.

Not: *Süre 50 dakikadır. Başarılar.* ***İNC***