MAT304 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ II ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad :……………………………......... 15.08.2002

Üniversite:..

Soru 1) G grubunun mertebesi çift olsun. G de tersi kendisine eşit olan en az bir $a \neq e$ elemanının varlığını açıklayınız. Bu tür a elemanlarının toplam sayısı hakkında fikir yürütünüz.

G nin mertebesi çift olsun ve tersine G de e dışında tersi kendisine eşit olan hiçbir eleman bulunmasın. a G nin bir elemanı ise a nın tersinin de G nin bir elemanı olduğunu biliyoruz.. Varsayım gereği a nın tersi a dan farklıdır. O halde e dışındaki tüm elemanlar tersleri ile ikişer ikişer sayılabilirler. Yani çift sayıdadırlar. Bunlara etkisiz elemanı da eklersek G nin eleman sayısının tek olduğu görülür. Bu da bir çelişkidir. O halde G de e dışında en az bir elemanın daha tersi kendisine eşit olmalıdır. Bu şekildeki elemanların sayısı da tek olmalıdır (ki e ile birlikte çift sayıya ulaşabilelim).

Soru 2) Üçüncü ve dördüncü mertebeden elemanlar bulunduran bir grubun mertebesi hakkında neler söylenebilir? Açıklayınız.

Lagrange teoreminin sonucu gereği bir gruptaki elemanların mertebeleri grubun mertebesini böler. O halde grubun mertebesi 3 ve 4 ile yani 12 ile bölünmelidir.

Soru 3) $(C_{36},+)$ devirli grubunun <20> normal alt grubu ile bölüm grubunu bulunuz. Sebebini kısaca açıklayınız. İndeksi nedir?

$(20,36) = 4$ olduğundan $\langle 20\rangle \cong C_{36/4} = C_9$ olduğundan $C_{36}/C_9 \cong C4$ bulunur. Yani bölüm grubu 4 elemanlı C_4 grubudur. İndeksi de 4 tür.

Soru 4) $f : G \to G'$ bir epimorfizm ve $N = \mathrm{Ker}\, f$ olsun. Herhangi bir $g' \in G'$ elemanına giden g elemanlarının sayısı hakkında ne söylenebilir?

f epimorfizm olduğundan örtendir ve dolayısıyla $f(G) = G'$ olur. O halde her bir g' elemanına giden en az bir g elemanı vardır. Aslında bu tür elemanların sayısının çekirdekteki eleman sayısına eşit olduğunu da biliyoruz.

Soru 5) $f: G \to H$ bir homomorfizm olsun.

$Im\, f = \{y \in H : y = f(x), \text{ belli bir } x \in G \text{ için}\}$

Kümesinin, H ın bir altgrubu olduğunu gösteriniz.

$A = \mathrm{Im}\, f$ diyelim. $y_1, y_2 \in A$ olsun. O halde x_1 ve x_2 elemanları $y_1 = f(x_1)$ ve $y_2 = f(x_2)$ olacak şekilde bulunabilirler. $y_1y_2^{-1} \in A$ olduğunu göstermeliyiz. Denk olarak öyle bir $x \in G$ elemanı bulmalıyız ki $f(x) = y_1y_2^{-1}$ olsun. $x_1x_2^{-1}$ G nin bir elemanı olmak üzere f bir homomorfizm olduğundan $f(x_1x_2^{-1}) = f(x_1)f(x_2^{-1}) = f(x_1)f(x_2)^{-1} = y_1y_2^{-1}$ olur ki bu da $y_1y_2^{-1} \in A$ olduğunu gösterir.

Not: *Süre 70 dakikadır. Başarılar.* ***İNC***