MAT303 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ I ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad :.. **13.08.2002**

Üniversite:..

Soru 1) $x \equiv 1 \ (4)$
$x \equiv 1 \ (5)$
$x \equiv 1 \ (7)$ kongrüans sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

$x = 1 + 4k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 1 + 4k \equiv 1 \ (5) \Rightarrow 4k \equiv 0 \ (5) \Rightarrow k \equiv 0 \ (5)$ $\Rightarrow k = 0 + 5t, \ t \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 1 + 4(5t) = 1 + 20t$ değeri 3. kongrüansta yerine konursa
$1 + 20t \equiv 1 \ (7) \Rightarrow 20t \equiv 0 \ (7) \Rightarrow t \equiv 0 \ (7) \Rightarrow t = 0 + 7m$, $m \in \mathbb{Z}$ bulunur. Böylece ortak çözüm
$x = 1 + 20(7m) = 1 + 140m$ olarak veya $x \equiv 1 \ (140)$ olarak bulunur.

Soru 2) s(n) ile n doğal sayısının pozitif bölenlerinin sayısını gösterelim. "s(n) tek $\Leftrightarrow$ n bir tam karedir" önermesi doğru mudur?

($\Leftarrow$) n bir tam kare olsun.

$$n = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \ldots p_k^{2\alpha_k}$$

şeklindedir. Burada pi ler farklı asallar ve αi ler doğal sayılardır. Bu durumda

$$s(n) = (2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1) \ldots (2\alpha_k + 1)$$

çarpımının tek olduğu bellidir.

($\Rightarrow$) s(n) tek ve n sayısının standart formu

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$$

şeklinde olsun. Bu durumda

$$s(n) = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \ldots (1 + \alpha_k)$$

tek verildiğinden $(1 + \alpha_i)$ çarpanlarının her biri tek ve dolayısıyla da her bir αi çift olmalıdır. Yani n bir tam karedir.

Soru 3) $p > 3$ asal ise, $p \mid (3^p-3)$ olduğunu gösteriniz.

Fermat teoremi gereği,

$$3^p \equiv 3 \ (p)$$

yazabiliriz. Bu da $p \mid (3^p-3)$ olduğunu gösterir.

Soru 4) Her $k \in \mathbb{Z}$ için $(a,b) = (a, b + ka)$ olduğunu gösteriniz.

d = (a,b) olsun. d | a ve d | b dir. O halde d | (b + ka) da olur. Yani d, a ve b + ka sayılarının bir ortak bölenidir. İkinci olarak, t, a ve b + ka sayılarının bir başka ortak böleni olsun. (t | d olduğunu göstermeliyiz). O halde t, a ve ((b + ka) – k.a) sayılarının yani a ve b sayılarının da bir ortak böleni olur. d = (a,b) olduğundan t, d yi bölmelidir.

Tersine d = (a, b + ka) diyerek yukarıdakine benzer şekilde d = (a,b) olduğu gösterilebilir.

Soru 5) $ax \equiv 20 \ (24)$ kongrüansının çözümü olmayacak şekildeki tüm a tamsayılarını belirleyiniz.

Verilen kongrüansın çözümü $(a,24) \mid 20$ iken mevcuttur. O halde çözümün olmaması için $d = (a,24)$ sayısının 20 yi bölmemesi gerekir. Yani $d \mid 24$ fakat d 20 yi bölmeyecek şekildeki a sayılarını belirlemek istiyoruz. Bunlar 3, 6, 8, 12 ve 24 dür.

__**Not:**__ *Süre 70 dakikadır. Başarılar.* **İNC**