MAT304 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ II 1.ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:……………………………........... **16.04.2002**

No :..

Soru 1) f: G → H, g : H → K iki homomorfizm ise g∘f : G → K dönüşümünün de bir homomorfizm olduğunu gösteriniz. (20 puan)

a, b∈G olsun. g∘f(ab) = g(f(ab)) = g(f(a)f(b)) = g(f(a))g(f(b)) = g∘f(a)g∘f(b) olup g∘f bir homomorfizmdir. Burada ikinci adımda f in, üçüncü adımda ise g nin bir homomorfizm olduğu kullanılmıştır.

Soru 2) f: G → H bir homomorfizm olsun.

Im f = {y∈H : y = f(x), belli bir x∈G için}

kümesinin H ın bir altgrubu olduğunu gösteriniz. (20 puan)

A = *Im* f diyelim. y_1, y_2 ∈ A olsun. O halde x_1 ve x_2 elemanları $y_1 = f(x_1)$ ve $y_2 = f(x_2)$ olacak şekilde bulunabilirler. $y_1y_2^{-1} \in A$ olduğunu göstermeliyiz. Denk olarak öyle bir x ∈ G elemanı bulmalıyız ki $f(x) = y_1y_2^{-1}$ olsun. $x_1x_2^{-1}$ G nin bir elemanı olmak üzere f bir homomorfizm olduğundan $f(x_1x_2^{-1}) = f(x_1)f(x_2^{-1}) = f(x_1)f(x_2)^{-1} = y_1y_2^{-1}$ olur ki bu da $y_1y_2^{-1} \in A$ olduğunu gösterir.

Soru 3) G bir grup ve x, y∈G olsun. H G nin bir normal altgrubu ise xy∈H iken yx∈H da olacağını gösteriniz. (20 puan)

H G nin bir normal altgrubu ve xy∈H olsun.

$$yx = yxyy^{-1} = y(xy)y^{-1}$$

yazılırsa xy∈H ve y∈G olduğundan H ın bir normal altgrup oluşu sebebiyle yx de H da kalacaktır.

Soru 4) G bir grup ve S G nin bazı altgruplarının bir kümesi olsun. S kümesinin, birleşme ve kesişme işlemlerine göre bir altgrup olup olamayacağını gösteriniz. (20 puan)

A,B∈S olsun.A∪B ve A∩B kümelerinin S de kalması gerekmez. O halde S birleşme ve kesişme işlemlerine göre bir altgrup değildir.

Soru 5) n pozitif bir tamsayı olsun. k bir tamsayı olmak üzere G, $e^{2k\pi i/n}$ şeklindeki tüm kompleks sayıların çarpım grubu olsun. G nin etkisiz elemanını bulunuz. Herhangi bir elemanın tersini belirleyiniz. G nin mertebesi nedir? (20 puan)

k = 0 için $e^0 = 1$ etkisiz elemandır. Gerçekten de

$$e^0 . e^{2k\pi i/n} = e^{2k\pi i/n}$$

dir. Benzer şekilde $e^{2k\pi i/n}$ elemanının tersi $e^{-2k\pi i/n}$ dir. G nin elemanları $e^{2.0.\pi i/n} = 1$, $e^{2\pi i/n}$, $e^{4\pi i/n}$, …, $e^{2.(n-1)\pi i/n}$, $e^{2n\pi i/n} = e^{2\pi i} = 1$, $e^{2(n+1)\pi i/n} = e^{2\pi i/n}$, … şeklinde tekrar etmeye başlayacağından G de toplam n tane eleman vardır. Yani G nin mertebesi n dir.

Not: *Süre 60 dakikadır. Başarılar.* ***İNC***