# MAT 2008 METRİK UZAYLAR II FİNAL SORULARI

**Ad-Soyad:..................................................** **20.01.2002**

**No :..................................................**

**Soru 1)** [-2,-1) kümesinin R deki alışılmış ve ayrık metriklere göre açıklığını tartışınız. (20 puan)

Alışılmış metriğe göre $(x_n) = (-1-\frac{1}{n})$ dizisi, terimleri [-2,-1) de olan bir dizidir ve de $(a_n) \to -1$ dir. Ancak $-1 \notin [-2,-1)$ olduğundan teoreme göre [-2,-1) kapalı değildir. Ayrık metriğe göre her küme hem açık hem de kapalı olduğundan [-2,-1) hem açık hem de kapalıdır.

**Soru 2)** X ayrık metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. $d(p,A)+d(q,A) = 0$ olduğu bilindiğine göre p ve q hakkında ne söylenebilir? (20 puan)

Ayrık metrikte d fonksiyonunun alabileceği değerler 0 veya 1 olabileceğinden istenen durum ancak $d(p,A) = 0$ ve $d(q,A) = 0$ olması durumunda mümkündür. Bu da p ve q noktalarının ikisinin de A kümesinde olmasıyla mümkündür.

**Soru 3)** X ayrık metrik uzayında bir A kümesinin içi, dışı, sınırı ve çapı hakkında ne söylenebilir? (20 puan)

A nın içi kendisine eşittir. Çünkü ayrık metrik uzayda her küme açıktır.

A nın dışı tümleyeninin içi olarak tanımlandığından ve tümleyeni de her küme gibi ayrık metrik uzayda açık olduğundan, A nın tümleyenine eşittir.

A nın sınırı X uzayından A nın içini ve dışını çıkarmakla elde edileceğinden ve bunlar da A nın kendisi ve tümleyeni olduğundan, boşkümedir.

A boşkümeden farklıysa çapı 1; boşküme ise 0 dır.

**Soru 4)** Bir X metrik uzayında bir A alt kümesinin sınırlı oluşu ile sonlu oluşunun birbirini gerektirip gerektirmediğini birer örnekle açıklayınız. (20 puan)

R alışılmış uzayında sınırlı olan (0,1) kümesi sonlu değildir. O halde sınırlı bir küme sonlu olmak zorunda değildir.

Sonlu bir A kümesi ise sınırlıdır. Gerçekten de, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ şeklinde ise

$$d(A) = \sup \{d(a_i,a_j)\}$$

sayısı $n.n = n^2$ tane sayının, yani sonlu tane sayının supu olacağından sonlu olmak zorundadır.

**Soru 5)** Bir metrik uzayda yakınsak bir dizinin limitinin tek olduğunu gösteriniz. Böyle bir dizinin yığılma noktaları hakkında ne diyebiliriz? (20 puan)

Tersine $(x_n)$ dizisinin a ve b gibi iki noktaya yakınsadığını varsayalım. Dolayısıyla, verilen her $\varepsilon>0$ sayısına karşılık, her $n \geq n_1$ için $d(x_n,a)< \varepsilon/2$ olacak biçiminde bir $n_1 \in \mathbf{N}$ ve her $n \geq n_2$ için $d(x_n,b)< \varepsilon/2$ olacak biçiminde bir $n_2 \in \mathbf{N}$ vardır. Eğer $n_o = \max\{n_1,n_2\}$olarak seçilirse, her $n \geq n_0$ için

$$d(a,b) \leq d(a,x_n) + d(x_n,b) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

elde edilir, $\varepsilon>0$ sayısı keyfi olduğundan $d(a,b) = 0$ ve dolayısıyla $a = b$ dir.