MAT303 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ I 1.ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad: *CEVAP ANAHTARI...........* **09.11.2001**

No :..

Soru 1) (a,b) = 1 ise (a-b, a+b) = 1 veya 2 olduğunu gösteriniz. (20 puan)

d = (a-b, a+b) diyelim. Bu durumda d bir ortak bölen olup d| (a-b) ve d| (a+b) dir. O halde d| ((a+b)+(a-b)), yani d| 2a ve benzer şekilde d| ((a+b)-(a-b)), yani d| 2b elde edilir. Yani d, 2a ve 2b sayılarının bir ortak bölenidir. (a,b) = 1 verildiğinden dolayı (2a,2b) = 2 dir. O halde d bir ortak bölen olduğu için 2a ve 2b nin obebi olan 2 yi de bölmek zorundadır. O halde d=1 veya d=2 olabilir.

Soru 2) 3 modunda 1 kalanını veren her asal sayının (7, 13, 19, 31 vs. gibi) aslında k bir tamsayı olmak üzere 6k+1 şeklinde olması gerektiğini açıklayınız. (20 puan)

$p = 3\cdot n + 1$ olsun. n tek ise p çift olacağından n çift olmalıdır. $n = 2\cdot k$, $k \in \mathbf{Z}$ denirse $p = 3\cdot 2\cdot k + 1$ olur.

Soru 3) N = 1.3 + 2.4 + 3.5 + ... + 2n(2n+2) toplamının 67 ile bölünebilmesi için n en az kaç olmalıdır? (20 puan)

$$N = 1\cdot 3 + 2\cdot 4 + \cdots + (2\cdot n - 1)\cdot(2\cdot n + 1) + \cdots + 2\cdot 4 + 4\cdot 6 + \cdots + 2\cdot n\cdot(2\cdot n + 2)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(4\cdot k^2 - 1\right) + \left(4\cdot k^2 + 4\cdot k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(8\cdot k^2 + 4\cdot k - 1\right)$$

$$= 8\cdot\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)}{6} + 4\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2} - n$$

$$= \frac{n}{3}\cdot(8\cdot n^2 + 18\cdot n + 7)$$

$$= \frac{n}{3}\cdot(2\cdot n+1)\cdot(4\cdot n+7)$$

yazılabileceğinden N nin 67 ile bölünebilmesi için çarpanlardan birinin 67 veya katı olması gerekir. En küçük n değeri sorulduğundan, bu çarpanlardan birinin 67 olması n = 67 , n = 33 veya n = 15 için mümkündür. O halde aranan en küçük n değeri n = 15 dir.

Soru 4) n bir doğal sayı olmak üzere A=3n +2 şeklindeki her sayının aynı türde bir asal çarpanının bulunduğunu gösteriniz. (20 puan)

$A = 3\cdot n + 2 = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}$ diyelim. p_i lerden hiçbiri 3 olamaz. Çünkü A 3 ile bölününce 2 kalanını vermektedir. O halde her bir p_i ya $3\cdot s + 1$ ya da $3\cdot s + 2$ biçimindedir ($s \in \mathrm{N}$). Eğer p_i lerin hepsi $3\cdot s + 1$ şeklinde ise A da aynı biçimde olacaktır. O halde en az bir p_i çarpanı $3\cdot s + 2$ şeklinde olmalıdır.

Soru 5) $2x + 3y + 4z \equiv 1$ (5) üç değişkenli lineer kongrüansının çözüm şartını ifade ediniz. Çözüm kümesinin kaç elemanlı olduğunu belirleyiniz. Çözüm kümesini bulunuz. (20 puan)

İki değişkenli kongrüanslara benzer olarak verilen kongrüansın çözüm şartının (2,3,4,5) | 1 olduğu söylenebilir. Burada

$$2x \equiv 6 - 8y - 4z \quad (5)$$

veya

$$x \equiv 3 - 4y - 2z \quad (5)$$

yazılabileceğinden her (y , z) çifti için bir çözüm elde edilecektir. O halde 5×5 = 25 adet çözüm üçlüsü mevcuttur. y ve z ye 5 modundaki değerler verilerek çözüm kümesi

$$Ç = \{ (3, 0, 0), (4, 1, 0), \ldots (4, 4, 4) \}$$

şeklinde bulunur.

<u>Not:</u> *Süre 60 dakikadır. Başarılar.* ***İNC***