

MAT 4100 GALOIS TEORİSİ ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:...CEVAP ANAHTARI.....

16.04.2025

No :.....

Soru 1) Bir elipsin simetrilerinin türlerini belirleyip bunların oluşturduğu grubu bulunuz. (20 puan)

Bir elipsin 180 derecelik bir dönme dönüşümü, etkisiz eleman, iki de düşey ve yatay eksenlerdeki yansımaları olmak üzere toplam 4 simetrisi olabilir. Bunlar da $V_4 = C_2 \times C_2$ grubunu oluştururlar.

Soru 2) Simetri grubu 10 elemanlı olan bir geometrik şekil bulunuz ve simetrileri hakkında bilgi veriniz. (20 puan)

Düzlemsel şekillerin simetri grupları dönme ve yansımalarından oluşur. 10 adet simetri olduğundan bunlardan beşi dönme beşi de yansımadır ve D_5 grubunu oluştururlar. Bu şekil beşli simetriye sahip bir düzgün beşgen veya beş köşeli yıldız olabilir.

Soru 3) R bir tamlık bölgesi olmasın. f ve g , katsayıları R 'den alınan iki polinom ise $f \cdot g$ çarpımının derecesi, f 'in ve g 'nin derecelerinin toplamına eşit olmak zorunda mıdır? (20 puan)

Bu şart bir tamlık bölgesinde sağlanır. R tamlık bölgesi olmadığından sıfır bölenlere sahiptir. a ve b iki sıfır bölen ve $ab = 0$ olsun. $f(x) = ax^n + \dots$ ve $g(x) = bx^m + \dots$ şeklinde iki polinom ise f ve g 'nin dereceleri toplamı $m+n$ iken $f \cdot g(x)$ polinomunun en yüksek dereceli terimi abx^{m+n} olur ki $ab = 0$ olduğundan $m+n$ dereceli terim yok olur. Geriye kalan terimler daha küçük mertebelidir ve dercelerin eşit olmayabileceği görülür.

Soru 4) Bir R halkasında $(-1)(-1) = 1$ olduğunu aksiyomları kullanarak gösteriniz. (20 puan)

$0 = 0 \cdot (-1) = (-1+1) \cdot (-1) = (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) = (-1) \cdot (-1) - 1$
Burada ilk adımda sıfırın yutan eleman olduğunu, ikincide toplamaya göre ters eleman özelliğini, üçüncüde dağılma özelliğini, dördüncüde ise birim eleman özelliğini kullandık. Şimdi de her iki tarafa -1 'in tersi olan 1 'i eklersek ve birleşme özelliğini kullanırsak $0+1 = (-1) \cdot (-1) - 1+1$ ve etkisiz ve ters eleman özelliklerinden sonuç görülür.

Soru 5) $x^7 - 24x^5 + 16x^4 - 48x^2 + 120 = 0$ denkleminde köklerin toplamını, ikişerli, üçerli ve dörderli çarpımlarının toplamalarını elde ediniz. (20 puan)

Kökler toplamı $-b/a = 0/1 = 0$; ikişerli çarpımların toplamı $c/a = -24/1 = -24$; üçerli çarpımların toplamı $-d/a = -16/1 = -16$ ve dörderli çarpımların toplamı $e/a = 0/1 = 0$ 'dir.

Not: Süre 50 dakikadır. Başarılar. İNC