MAT 3013 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ FİNAL SORULARI

Ad-Soyad:...CEVAP ANAHTARI **10.01.2013**

No :..

Soru 1) $b_k(n) = \sum_{d|n} d^k$ olsun. $b_1(12) + b_2(12)$ toplamını hesaplayınız. (20 puan)

$$d\,|\,12 \Rightarrow d = 1,2,3,4,6,12$$

$$\sum_{d|12} d^1 + \sum_{d|12} d^2 = 1+2+3+4+6+12$$

$$+1^2+2^2+3^2+4^2+6^2+12^2 = 238$$

veya ± tüm bölenleri alırsak 0+420=420 bulunur.

Soru 2) p asal ise (p-1)! + 1 toplamını bölen en küçük sayının p olduğunu gösteriniz. (20 puan)

Wilson teoremi gereği

$$\overset{p\,asal}{\Rightarrow} (p-1)! \equiv -1\,(p) \Rightarrow (p-1)!+1 \equiv 0\,(p)$$

$$\Rightarrow p\,|\,[(p-1)!+1]$$

dir. Ayrıca $1 \le k < p$ için $k \mid (p-1)!$ olacağından $k \nmid [(p-1)!+1]$ dir.

Soru 3) 3'e belli sayıda 17 ekleyerek bir tam kare elde edebilir miyiz? Açıklayınız. (20 puan)

Yani $\left(\frac{3}{17}\right) = 1$?

$$\left(\frac{3}{17}\right) = \left(\frac{17}{3}\right)(-1)^{8.1} = \left(\frac{17}{3}\right) \overset{17\equiv 2(3)}{=} \left(\frac{2}{3}\right) = -1 \quad \text{olur}$$

ve bir tam kare elde edilemez.

Soru 4) Bir $a \in Q_n$ ikinci dereceden kalanının 4 tane köke sahip olduğu en küçük n modunu belirleyiniz. (20 puan)

Kök sayısını veren formül

$$N = \begin{cases} 2^{k+1} & n \equiv 0(8) \\ 2^{k-1} & n \equiv 2(4) \\ 2^k & d.haller \end{cases}$$

şeklindedir. O halde ihtimaller şu şekildedir.

1) $2^{k+1} = 4 = 2^2 \Rightarrow k = 1$ ve $n \equiv 0(8) \Rightarrow n = 8,16,24,\ldots$ en küçük $n = 8$ dir.

2) $2^{k-1} = 2^2 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow n > 8$ olacağı açıktır.

3) 2k = 22 ise k = 2'dir. Ya n tek ya da n = 4 (8) olacağından n tek ise en az n=3.5=15 olur, diğer halde en az n=12 olur. Cevap n=8'dir.

Soru 5) $x \equiv 1 \ (2)$
$x \equiv 3 \ (4)$
$x \equiv 7 \ (8)$
kongrüans sisteminin çözümünü bulunuz. (20 puan)

$$x = 1+2k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 1+2k \equiv 3(4)$$

$$\Rightarrow 2k \equiv 2(4) \overset{(2,4)=2}{\Rightarrow} k \equiv 1(2)$$

$$\Rightarrow k = 1+2t, t \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 1+2(1+2t) = 3+4t$$

$$\Rightarrow 3+4t \equiv 7(8) \Rightarrow 4t \equiv 4(8) \overset{(4,8)=4}{\Rightarrow} t \equiv 1(2)$$

$$\Rightarrow t = 1+2m, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 3+4(1+2m) = 7+8m$$

$$\Rightarrow x \equiv 7(8)$$

2.*YOL*

$$\left.\begin{matrix} x \equiv -1 & (2) \\ x \equiv -1 & (4) \\ x \equiv -1 & (8) \end{matrix}\right\} \Rightarrow x \equiv -1([2,4,8])$$

$$\Rightarrow x \equiv 7(8)$$

Süre 70 dakikadır. Başarılar. inc+ay