MAT 1002 ANALİZ II YYS Sınavı Soruları

Öğrenci No : ....CEVAP ANAHTARI

Adı, Soyadı : 06.06.2016

Aşağıdaki soruların cevaplarını boşluklara yazınız.

1. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_k^{k+1} xe^{-x}\,dx\right)$ serisinin toplamını bulunuz.

$\int_k^{k+1} xe^{-x}dx$ integralini hesaplayalım.

$x=u$, $e^{-x}dx=dv$

$dx=du$, $-e^{-x}=v$

$\int xe^{-x}dx=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx=-xe^{-x}-e^{-x}$

$\Rightarrow \int_k^{k+1} xe^{-x}dx=\left[-xe^{-x}-e^{-x}\right]\Big|_k^{k+1}$

$=-(k+1)e^{-(k+1)}-e^{-(k+1)}+\left(ke^{-k}+e^{-k}\right)$

$=-e^{-(k+1)}(k+2)+e^{-k}(k+1)$

Dolayısıyla serinin a_n genel terimi

$a_n=-e^{-(n+1)}(n+2)+e^{-n}(n+1)$

olur. Serinin n-inci kısmi toplamı

$S_n=\left(-3\cancel{e^{-2}}+2e^{-1}\right)+\left(\cancel{-4e^{-3}}+\cancel{3e^{-2}}\right)$

$+\left(-5e^{-4}+\cancel{4e^{-3}}\right)+\cdots$

$+\left(-e^{-(n+1)}(n+2)+\cancel{e^{-n}(n+1)}\right)$

$=2e^{-1}-e^{-(n+1)}(n+2)$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left[2e^{-1}-e^{-(n+1)}(n+2)\right]$

$=\lim_{n\to\infty}\left[2e^{-1}-\frac{(n+2)}{e^{n+1}}\right]$

$=\lim_{n\to\infty}\left[2e^{-1}-\frac{1}{e^{n+1}}\right]$

$=2e^{-1}$

olduğundan seri yakınsaktır ve toplamı

$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_k^{k+1} xe^{-x}dx\right)=\frac{2}{e}$ 'dir.

2. $\int_0^3 x\left(x^2-9\right)^{-2/3}dx$ integralini hesaplayınız.

Has olmayan integraldir.

$\int_0^3 x(x^2-9)^{-2/3}dx=\lim_{b\to 3^-}\int_0^b x(x^2-9)^{-2/3}dx$

$x^2-9=t \Rightarrow 2x\,dx=dt$

$\int \frac{x}{(x^2-9)^{2/3}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^{2/3}}=\frac{3}{2}t^{1/3}$

$=\frac{3}{2}(x^2-9)^{1/3}$

$\Rightarrow \int_0^3 x(x^2-9)^{-2/3}dx=\lim_{b\to 3^-}\left[\frac{3}{2}(x^2-9)^{1/3}\right]\Big|_0^b$

$=\lim_{b\to 3^-}\frac{3}{2}\left[(b^2-9)^{1/3}-(-9)^{1/3}\right]$

$=-(-9)^{1/3}$

olduğundan integral yakınsaktır.

3. $\int \frac{x\tan x}{\cos x}dx$ integralini kısmi integrasyon yöntemini kullanarak hesaplayınız.

$x=u \Rightarrow dx=du$

$\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx=dv \Rightarrow -\frac{1}{\cos x}=v$

$\int\frac{x\tan x}{\cos x}dx=-\frac{x}{\cos x}+\int\frac{dx}{\cos x}$

$=-x\sec x+\int \sec x\,dx$

$=-x\sec x+\ln|\sec x+\tan x|+c$

4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+5k+6}$ serisinin toplamını bulunuz.

$$\frac{1}{k^2+5k+6} = \frac{A}{k+2} + \frac{B}{k+3} \Rightarrow \begin{array}{l} A=1 \\ B=-1 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Serinin a_n genel teriminin kısmî kesirlere ayrılmış hali

$$a_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$$

olur. Serinin n-inci kısmî toplamı

$$S_n = \left(\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\cancel{\cdots}+\left(\cancel{\frac{1}{n+2}}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}$$

olur. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}\right) = \frac{1}{3}$$

elde edilir. Dolayısıyla seri yakınsaktır ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+5k+6} = \frac{1}{3}$$ 'tür.

5. $\left[1,\sqrt{3}\right]$ aralığı üzerinde $y=\ln x$'in grafiğinin uzunluğunu bulunuz.

$$y=\ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x} \Rightarrow (y')^2 = \frac{1}{x^2}$$

$$L = \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx$$

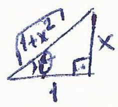
$$x=\tan\theta \Rightarrow dx = \sec^2\theta\, d\theta$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx = \int \frac{\sqrt{\tan^2\theta+1}}{\tan\theta}\sec^2\theta\, d\theta = \int \frac{\sec^3\theta}{\tan\theta}\,d\theta$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2\theta\sin\theta}\,d\theta = \int \frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta\sin\theta}\,d\theta$$

$$= \int \operatorname{cosec}\theta\, d\theta + \int \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta \qquad \begin{array}{l}\cos\theta=u \\ -\sin\theta\, d\theta = du\end{array}$$

$$= \ln\left|\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta\right| + \frac{1}{\cos\theta}$$



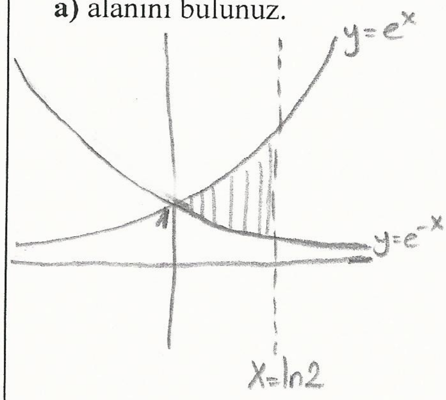
$$= \ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right| + \sqrt{1+x^2}$$

$$\Rightarrow L = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx = \left[\ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right) + \sqrt{1+x^2}\right]_1^{\sqrt{3}}$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1}\right) + 2 - \sqrt{2} \text{ br}$$

6. $y=e^x$, $y=e^{-x}$ ve $x=\ln 2$'nin grafikleri tarafından sınırlanan bölgenin

a) alanını bulunuz.



$$A = \int_0^{\ln 2} (e^x - e^{-x})\,dx$$

$$= (e^x + e^{-x})\Big|_0^{\ln 2}$$

$$= e^{\ln 2} + e^{-\ln 2} - 2$$

$$= 2 + \frac{1}{2} - 2$$

$$= \frac{1}{2} \text{ br}^2$$

b) x-ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel yüzeyin hacmini bulunuz.

$$V = \pi \int_0^{\ln 2} (e^{2x} - e^{-2x})\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[e^{2x} + e^{-2x}\right]\Big|_0^{\ln 2}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[4 + \frac{1}{4} - 2\right]$$

$$= \frac{9\pi}{8} \text{ br}^3$$

İlk beş soru 15'er son soru 30 puan olup sınav süresi 80 dakikadır. Başarılar.

Prof. Dr. İ. Naci Cangül, Arş. Gör. Dr. Aysun Yurttaş