

# MAT 4095 GRAF TEORİYE GİRİŞ ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:.....

28.11.2022

No :.....

**Soru 1)** Mertebesi boyutunun iki katına eşit olan köşe sayısı en küçük basit grafi bulunuz ve çiziniz.

Basit graflarda  $m \leq n(n-1)/2$  olduğunu biliyoruz.  $n = 2m$  olduğundan  $m = n/2$  değerini ilk eşitsizlikte yerine yazarsak  $n/2 \leq n(n-1)/2$  ve böylece  $n \geq 2$  elde edilir. Yani en küçük  $n$  değeri 2'dir.  $n = 2$  için  $m = 1$  olup aranan graf  $P_2$  patika grafıdır.

**Soru 2)** 15 kenarlı ve 13 köşeli bir grafta 1., 2., 3. ve 4. dereceden en az bir en çok 4 tane köşe bulunduğu biliniyor. Derecesi 1 olan 4 tane, derecesi 4 olan 2 tane köşe varsa derecesi 2 ve 3 olan köşelerin sayılarını bulunuz.

Aranan sayılar  $x$  ve  $y$  olsun. Dereceler toplamı kenar sayısının iki katı olduğundan  $4 \cdot 1 + 2 \cdot x + 3 \cdot y + 2 \cdot 4 = 2 \cdot 15 = 30$  denklemi ve böylece  $2 \cdot x + 3 \cdot y = 18$  elde edilir. Bu denklemin pozitif tamsayı olan ve dörtten büyük olmayan çözümlerini arıyoruz. Bu da  $x = 3$  ve  $y = 4$  olarak bulunur.  $x = 6$  ve  $y = 2$  çözümünde  $x > 4$  olduğundan bu çözüm aranan şartlara uymamaktadır.

**Soru 3)** Boyutu mertebesinden bir eksik olan bağlantılı ve basit grafların ortak özellikleri nedir? Açıklayınız.

$m = n-1$  veriliyor.  $n = 2$  iken  $m = 1$  olup  $P_2$  patika grafı elde edilir.  $n = 3$  iken  $m = 2$  olup  $P_3$  patika grafı elde edilir.  $n = 4$  iken  $m = 3$  olup  $P_4$  patika grafı veya  $S_4$  yıldız grafı elde edilir.  $n = 5$  iken  $m = 4$  olup  $P_5$  patika grafı,  $S_5$  yıldız grafı veya



elde edilir. Bunların tümünün ortak özelliği kapalı bir yüze sahip olmamalarıdır.

**Soru 4)**  $W_n$  tekerlek grafının bağımsızlık sayısı 3 ise  $n$  sayısı hangi değerleri alabilir?

$W_n$  tekerlek grafı,  $S_n$  star grafının etrafına bir  $C_{n-1}$  devir grafı konulmasıyla elde edilir. Bağımsızlık sayısını hesaplarken tüm diğer köşelere komşu olan merkez köşeyi alamayız. Yani  $C_{n-1}$  üzerindeki köşelerden birbirine komşu olamayan en yüksek sayıdaki köşeyi seçmeliyiz. Bu sayı da  $(n-1)/2$ 'nin tamdeğeridir. O halde  $\lfloor (n-1)/2 \rfloor = 3$  denklemini çözmeliyiz. Bu da  $n = 6$  ve  $7$  için sağlanır.

**Soru 5)**  $T_{7,5}$  larva grafının deviri üzerinde bulunan ve derecesi 2 olan köşelerden iki tanesini bir kirişle birleştirdiğimizde oluşacak grafın kutuplaşma sayısının alabileceği değerleri bulunuz.

Bahsedilen devir 7 uzunlukludur ve bir köşenin derecesi 3, diğerlerinin 2'dir. Yedigenin içine bir kiriş çizilince  $K_4$  tam grafını bulduran bir graf elde edilemeyeceğinden kutuplaşma sayısı en çok 3 olabilir. Eğer aralarında bir köşe bulunan iki köşeyi birleştirirsek bir üçgen ( $K_3$ ) elde edilir ve bu durumda aranan sayı 3 olur. Eğer bunun dışında bir birleştirme yaparsak bir üçgen elde edilemez ve kenarlardan ( $K_2$ ) dolayı kutuplaşma sayısı 2 olur.

Süre 50 dakikadır. Başarılar.

inc