MAT 1002 ANALİZ II Final Soruları

Öğrenci No : 18.06.2019

Adı-Soyadı : ....

Aşağıdaki soruların cevaplarını boşluklara yazınız.

1. $\int_0^3 x(x^2-9)^{-2/3}dx$ integralini hesaplayınız. (20 puan)

x=3 için fonksiyon tanımsız old.dan has olmayan integraldir.

$$\lim_{b\to 3}\int_0^b x(x^2-9)^{-2/3}dx$$

$x^2-9=t$

$2xdx=dt$

$xdx=\frac{dt}{2}$

$$=\lim_{b\to 3}\int t^{-2/3}\frac{dt}{2}$$

$$=\lim_{b\to 3}\frac{3}{2}t^{1/3}\Big|$$

$$=\lim_{b\to 3}\frac{3}{2}(x^2-9)^{1/3}\Big|_0^b=\lim_{b\to 3}\frac{3}{2}(b^2-9)^{1/3}-\frac{3}{2}\cdot(-9)^{1/3}$$

$$=0+\frac{3}{2}\cdot 9^{1/3}=\frac{3}{2}\cdot 9^{1/3} \;//$$

2. $\int \frac{x}{(x+1)^2}e^x dx$ integralini hesaplayınız. (20 puan)

$$\frac{x}{(x+1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}$$

$x=A(x+1)+B$

$A=1,\ B=-1$

$$=\underbrace{\int\frac{1}{x+1}\cdot e^x dx}_{\text{kısmi integrasyon uygulanırsa}}-\int\frac{1}{(x+1)^2}e^x dx$$

$\frac{1}{1+x}=u\to\frac{-1}{(1+x)^2}dx=du$

$e^x dx=dv\to e^x=v$

$$=e^x\cdot\frac{1}{1+x}+\cancel{\int\frac{+e^x}{(1+x)^2}dx}-\cancel{\int\frac{e^x}{(1+x)^2}dx}$$

$$=e^x\cdot\frac{1}{x+1}\;//$$

3. $f(x)=\frac{1}{1+x}$ fonksiyonunun $a=4$'deki Taylor seri açılımını bulunuz. (20 puan)

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\frac{f^{(IV)}(a)}{4!}(x-a)^4+\dots$$

$f(x)=\frac{1}{1+x}\to f(4)=\frac{1}{5}$

$f'(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}\to f'(4)=\frac{-1}{5^2}$

$f''(x)=\frac{2\cancel{(1+x)}}{(1+x)^{\cancel{4}3}}\to f''(4)=\frac{2}{5^3}$

$f'''(x)=\frac{-6\cancel{(1+x)^2}}{(1+x)^{\cancel{6}4}}\to f'''(4)=\frac{-6}{5^4}$

$f^{(IV)}(x)=\frac{24\cancel{(1+x)^3}}{(1+x)^{\cancel{8}5}}\to f^{(IV)}(4)=\frac{24}{5^5}$

$$f(x)=\frac{1}{5}-\frac{1}{5^2}\cdot(x-4)+\frac{\cancel{2}}{5^3}\frac{(x-4)^2}{\cancel{2}}-\frac{\cancel{6}}{5^4}\frac{(x-4)^3}{\cancel{6}}+\frac{\cancel{24}}{5^5}\cdot\frac{(x-4)^4}{\cancel{24}}-\dots$$

$$=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5}(x-4)+\frac{1}{5^2}(x-4)^2-\frac{1}{5^3}(x-4)^3+\frac{1}{5^4}(x-4)^4-\dots\right)$$

$$=\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{5^k}(x-4)^k \;//$$

4. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{3^{2k}}(x+7)^k$ kuvvet serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz. (20 puan)

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(k+1)^2\,\cancel{(x+7)^{k+1}}^{(x+7)}}{\cancel{3^{2k+2}}_{9}} \cdot \frac{\cancel{3^{2k}}}{k^2\,\cancel{(x+7)^k}}\right|$$

$$= \left|\frac{(k+1)^2}{k^2}\cdot\frac{(x+7)}{9}\right|$$

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)^2}{k^2}\cdot\frac{(x+7)}{9}\right| = \left|\frac{x+7}{9}\right|$$

$\frac{|x+7|}{9}<1 \rightarrow |x+7|<9$ ise

$-16<x<2$ aralığnda

seri yaknsaktır

$|x+7|>9$ old.da seri ıraksaktır

$|x+7|=9$ ise $\rightarrow x+7=9 \rightarrow x=2$

$x+7=-9 \rightarrow x=-16$

$x=2$ ise $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{\cancel{3^{2k}}}\cdot\cancel{3^{2k}} \Rightarrow$ seri ıraksak

$x=-16$ ise $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{3^{2k}}(-9)^k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{\cancel{3^{2k}}}\cdot\cancel{3^{2k}}\cdot(-1)^k$

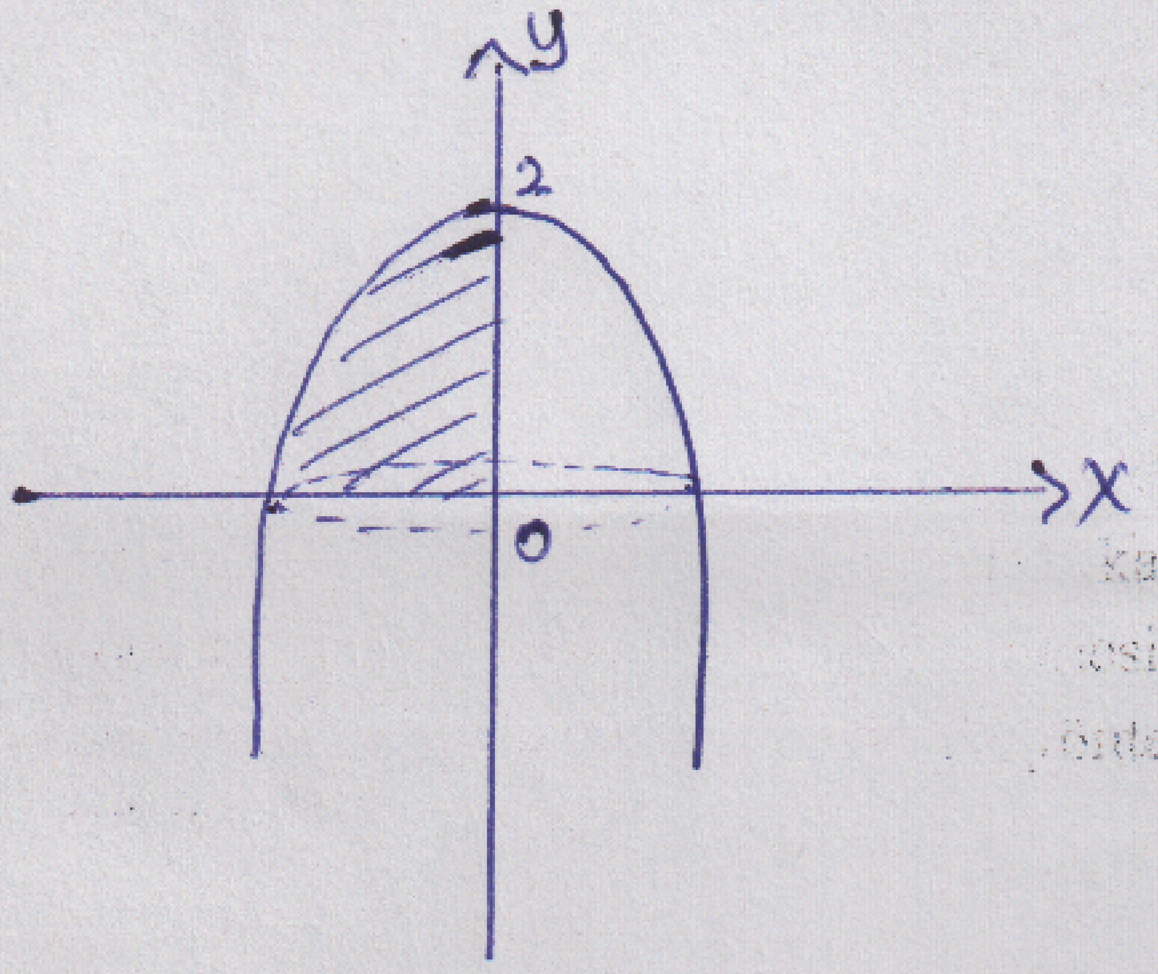
(alterne seri)

O halde serinin yakınsaklık aralığı

$-16<x<2$ dir.

5. $y=-x^2+2$ ve $x=0$ arasında kalan bölgenin y ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen cismin hacmini kabuk yöntemi yardımıyla elde ediniz. (20 puan)

$y=0$ ve (ikinci bölge)



$y=-x^2+2$

$x^2=2-y$

$x=\sqrt{2-y}$

$$V=2\pi\int_0^2 y\left(0-\sqrt{2-y}\right)dy$$

$2-y=t^2$

$-dy=2t\,dt$

$$=2\pi\int(2-t^2)\cdot(+t)\,2t\,dt$$

$$=2\pi\int(4t^2-2t^4)\,dt$$

$$=2\pi\left(4\frac{t^3}{3}-2\frac{t^5}{5}\right)$$

$$=2\pi\left(\frac{4}{3}(2-y)^{3/2}-\frac{2}{5}(2-y)^{5/2}\right)\Bigg|_0^2$$

$$=2\pi\left(0-\left(\frac{4}{3}2^{3/2}-\frac{2}{5}2^{5/2}\right)\right)$$

$$=2\pi\left(\frac{2}{5}2^{5/2}-\frac{4}{3}2^{3/2}\right)$$

Sınav süresi 70 dakikadır. Başarılar.

Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL, Elif KIZILDERE