

Öğrenci No : .....

Adı-Soyadı : CEVAP ANAHTARI

Aşağıdaki soruların cevaplarını boşluklara yazınız.

1.  $\lim_{x \rightarrow 1/2} 8(2x + 5) = 48$  olduğunu limitin tanımı yardımıyla gösteriniz.

$\forall \varepsilon > 0$  için  $0 < \left| x - \frac{1}{2} \right| < \delta$  iken  $|8(2x + 5) - 48| < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $\delta > 0$  sayısı bulabilir miyiz?

$|8(2x + 5) - 48| = |16x - 8| = 16 \left| x - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$  olur ve buradan  $\left| x - \frac{1}{2} \right| < \frac{\varepsilon}{16}$  olur. Böylece  $0 < \left| x - \frac{1}{2} \right| < \frac{\varepsilon}{16}$  olacağından  $\delta \leq \frac{\varepsilon}{16}$  seçilebilir.

2. L'Hospital kuralını kullanmadan  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}$  değerini hesaplayınız.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x - \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/4} (\cos x + \sin x) = \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

3.  $y = (-1 + \cos 4x)^3$  fonksiyonunun  $x = \frac{\pi}{8}$  noktasındaki teğetin denklemini bulunuz.

$$\begin{aligned} y' &= 3(-1 + \cos 4x)^2 (-4 \sin 4x) \\ &= -12(-1 + \cos 4x)^2 \sin 4x \end{aligned}$$

$x = \frac{\pi}{8}$  için  $y' = -12(-1 + \cos \frac{\pi}{2})^2 \sin \left( \frac{\pi}{2} \right) = -12$   
ve  
 $x = \frac{\pi}{8}$  için  $y = (-1 + \cos \frac{\pi}{2})^3 = (-1)^3 = -1$ 'dir.

$\left( \frac{\pi}{8}, -1 \right)$  noktasından geçen ve  $m_t = -12$  olan denklemi yazarak teğet denklemini bulabiliriz. Bir noktası ve eğimi bilinen doğru denklemini formülünden

$$(y + 1) = -12 \left( x - \frac{\pi}{8} \right)$$

denklemini yazabiliriz. Bu denklemi düzenlediğimizde elde edilen  $y = -12x + \frac{3\pi}{2} - 1$  denklemini teğet denklemdir.

4.  $xy = e^{(x+y)^2}$  olduğuna göre  $\frac{dy}{dx}$  değerini hesaplayınız.

$$y + xy' = 2(x + y)(1 + y')e^{(x+y)^2}$$

$$y + xy' = 2(x + xy' + y + yy')e^{(x+y)^2}$$

$$y + xy' = 2e^{(x+y)^2}x + 2e^{(x+y)^2}xy' + 2e^{(x+y)^2}y + 2e^{(x+y)^2}yy'$$

$$xy' - 2e^{(x+y)^2}xy' - 2e^{(x+y)^2}yy' = 2e^{(x+y)^2}x + 2e^{(x+y)^2}y - y$$

$$y'(x - 2e^{(x+y)^2}x - 2e^{(x+y)^2}y) = 2e^{(x+y)^2}x + 2e^{(x+y)^2}y - y$$

$$y' = \frac{2e^{(x+y)^2}x + 2e^{(x+y)^2}y - y}{x - 2e^{(x+y)^2}x - 2e^{(x+y)^2}y}$$

dir.

5. Bir buz parçasının daima kübik şeklini koruyacak şekilde eridiğini kabul edelim. Küpün hacmi  $\frac{1}{7}$   $\text{cm}^3/\text{dk}$ 'lık bir oranla azalıyor, yüzey alanı  $96 \text{ cm}^2$  olduğunda küpün yüzey alanı ne kadar hızla değişmektedir?

Bir kenar uzunluğu  $a$  olan bir küpün hacmi  $V=a^3$ ; yüzey alanı ise  $S=6a^2$ 'dir. Burada  $\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{7} \text{ cm}^3/\text{dk}$ 'dır.  $S=6a^2 = 96 \text{ cm}^2$  ise  $a = 4 \text{ cm}$  bulunur. Küpün hacminin formülünde türev alırsa

$$\frac{dV}{dt} = 3a^2 \frac{da}{dt}$$

$$-\frac{1}{7} = 3 \cdot 16 \cdot \frac{da}{dt}$$

$$\frac{da}{dt} = -\frac{1}{336} \text{ cm/dk}$$

bulunur. Yüzey alanının değişme hızı yani  $\frac{dS}{dt}$  sorulduğundan yüzey alanı formülünde türev alırsa

$$\frac{dS}{dt} = 12a \frac{da}{dt}$$

$$\frac{dS}{dt} = 12 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{336}\right) = -\frac{1}{7} \text{ cm}^2/\text{dk}$$

bulunur.

Sınav süresi 70 dakikadır. Başarılar.

Prof. Dr. İ. Naci Cangül, Elif Kızıldere