MAT3020 SOYUT CEBİR BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

Ad-Soyad :…………………………........... **07.09.2018**

No:………..

Soru 1) D_4 dihedral grubunun biri devirli biri devirli olmayan 4 elemanlı iki alt grubunu bulunuz.

$D_4 \cong \{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$ olsun. Grup tablolarından biliyoruz ki 4 elemanlı 2 farklı grup vardır. C_4 ve V_4. C_4 devirli grubu a (veya a^3) ile üretilebilir ve $C_4 \cong \{e, a, a^2, a^3\}$ şeklindedir. V_4 Klein dörtlü grubu ise bir tek elemanla üretilemez ve devirli değildir. e dışında tüm elemanlar 2. mertebedendir. O halde $V_4 \cong \{e, a^2, b, a^2b\}$ şeklindedir.

Soru 2) $Z_{11}^* = Z_{11} \backslash \{0\}$ grubunda

$H = \{x \mid x \equiv 1\ (4)\}$

altkümesinin bir alt grup olup olmadığını belirleyiniz.

$Z_{11}^* = \{1, 2, 3, \ldots, 9, 10\}$ ve $H = \{1, 5, 9\} \subset Z_{11}^*$ olup sonlu bir altküme olduğundan kapalılığına bakmak gerekir. $5 \cdot 5 = 3 \notin H$ olup H kapalı olmadığından bir alt grup değildir.

Soru 3) $f : G \to G'$ bir otomorfizm ise G/Ker f bölüm grubunu belirleyiniz.

f bir otomorfizm olduğundan birebirdir. O halde çekirdek tek elemanlıdır ve Ker f = {e} olur. Yani G/Ker f = G/{e} = G olur.

Soru 4) Bir G grubunda bir $a \in G$ elemanı için $Z(a) = \{g \in G : ga = ag\}$ kümesi a elemanının merkezleştiricisi olarak adlandırılır. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(R)$ elemanının merkezleştiricisini belirleyiniz.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ eşitliğinin her iki tarafında çarpma yapılırsa $\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix}$ elde edilir. Buradan c=0, a=b+d elde edilir. Yani merkezleştirici b, c ve d birer reel sayı olmak üzere $\begin{pmatrix} b+d & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ şeklindeki tüm matrislerden oluşur.

Soru 5) Z tamsayılar kümesi, üzerinde a*b =a+3b ile tanımlı olan ikili işlemle birlikte bir grup olur mu?

(a*b)*c = (a+3b)*c = a+3b+3c ve a*(b*c) = a*(b+3c) = a+3(b+3c) = a+3b+9c olduğundan birleşme özelliği sağlanmaz ve Z, * işlemine göre bir grup değildir.

<u>Not:</u> *Süre 60 dakikadır. Başarılar.* ***İNC***