MAT 3019 SAYILAR TEORİSİ FİNAL SORULARI

Ad-Soyad:.. **18.12.2017**
No :..

Soru 1) $5x+4y\equiv 7$ (10) kongrüansının tüm çözümlerini bulunuz.

$(5,4,10) = 1|7$ olduğundan çözüm vardır.

$4y \equiv 7 - 5x$ (10)

olup, x değişkeninin 0'dan 9'a kadar olan değerlerinin tümü için 7-5x, 4 ile bölünmediğinden deneme yoluyla uygun x değerlerini seçmeliyiz.

$x = 1$ için $4y \equiv 2$ (10) ve $4y \equiv 12$ (10)

ve $(4,10) = 2$ olduğundan $y \equiv 3$ (5) elde edilir. Yani $x = 1$ için 10 modunda $y = 3$ ve $y = 8$ elde edilir. x değişkeninin $10/(10,4)=5$ farklı değeri olduğundan diğer x değerleri 3, 5, 7 ve 9 olarak bulunur. Karşılık gelen y değerleri yine 3 ve 8'dir. Yani

Ç = {(1,3), (3,3), (5,3), (7,3), (9,3), (1,8), (3,8), (5,8), (7,8), (9,8)}

dir.

Soru 2) p tek asal sayı ise p modundaki ikinci dereceden kalanların toplamının p ile bölünebildiğini gösteriniz.

r, p modunda bir ikinci dereceden kalan ise $1 \le k \le p-1$ özelliğinde bir k için $k^2\equiv r$ (p) ve $(p-k)^2\equiv r$ (p) olduğunu biliyoruz. (N=2 olduğundan U_p'deki iki farklı sayının kareleri aynı olacaktır.) Yani $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, (p-1)^2$ dizisinin terimleri $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{(p-1)/2}$ değerlerini ikişer kez alacaktır. Dolayısıyla ikinci dereceden kalanların toplamı

$$2(r_1+r_2+r_3+\ldots+r_{(p-1)/2}) = 1^2+2^2+3^2+\ldots+(p-1)^2$$
$$= (p-1)p(2p-1)/6$$

olur ve ikinci dereceden kalanların toplamının p ile bölünebildiği görülür.

Soru 3) p tek asal olsun. Hangi n pozitif tamsayıları için $p^{2n}-1$ sayısının asal olacağını belirleyiniz.

$p^{2n}-1 = (p^n)^2-1^2 = (p^n-1)(p^n+1)$ olup $p \ge 3$ ve $n > 0$ bir tamsayı olduğundan parantez içindeki sayılar sırasıyla en az 2 ve 4 olabilir. Bu da $p^{2n}-1$ farkının en az 8 olduğunu ve 1'den büyük iki çarpana sahip olduğunu gösterir. Yani $p^{2n}-1$ farkı asal olamaz.

Soru 4) $3^{100}-5^{100}+7^{100}-9^{100}$ sayısının 11 ile bölünüp bölünmediğini belirleyiniz.

11 asal olduğundan Fermat'nın küçük teoremi gereği 11 ile aralarında asal olan her a tamsayısı için $a^{10}\equiv 1$ (11) olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $3^{100}\equiv 5^{100}\equiv 7^{100}\equiv 9^{100}\equiv 1$ (11) olur. Bu nedenle

$3^{100}-5^{100}+7^{100}-9^{100}\equiv 1-1+1-1\equiv 0$ (11)

olacağından sorulan sayı 11 ile bölünebilir.

Soru 5) 1009'un tamsayı katlarının 7 eksikleri arasında tam kare bulunup bulunmadığını belirleyiniz.

Soruyu $x^2\equiv -7$ (1009) kongrüansının çözümünün olup olmadığı ve bunu da denk olarak $\left(\frac{-7}{1009}\right)$ Legendre sembolünün 1 veya -1'e denk olduğu şeklindeki soruya dönüştürebiliriz. O halde $1009\equiv 1$ (4) olduğundan -1, 1009 modunda bir tam karedir ve

$$\left(\frac{-7}{1009}\right)=\left(\frac{-1}{1009}\right)\left(\frac{7}{1009}\right)=\left(\frac{7}{1009}\right)$$
$$=\left(\frac{1009}{7}\right)(-1)^{504\cdot 3}=\left(\frac{1}{1009}\right)=1$$

olur. Yani verilen sayılar arasında tam kareler vardır.

Süre 70 dakikadır. Başarılar. ***inc+ay***