

# MAT3020 SOYUT CEBİR BÜTÜNLEME SORULARI

Ad-Soyad :....CEVAP ANAHTARI.....

21.08.2017

No:.....

**Soru 1)**  $D_{12} \cong \langle a, b \mid a^2 = b^{12} = (ab)^2 = e \rangle$  dihedral grubunda  $x = ab^4ab^2ab^6aba$  elemanın mertebesini belirleyiniz.

$a = a^{-1}$  ve  $ba = ab^{11}$  olduğundan

$$\begin{aligned} x^2 &= ab^4ab^2ab^6abaab^4ab^2ab^6aba \\ &= ab^4ab^2ab^6ab^5ab^2ab^6aba \\ &= ab^4ab^2ab^6ab^5ab^2ab^6aab^{11} \\ &= ab^4ab^2ab^6ab^5ab^2ab^5 \\ &= ab^4ab^2ab^6ab^5abab^4 \\ &= ab^4ab^2ab^6ab^8 \\ &= ab^3abab^6ab^8 \\ &= (ab^8)^2 \end{aligned}$$

olur ve bu da bir yansıma olduğundan ikinci mertebededir. O halde  $x$ , dördüncü mertebededir.

**Soru 2)**  $S_n/A_n$  grubu ile  $D_n/C_n$  grubu arasında bir izomorfizm bulunabilir mi? Açıklayınız.

Her iki grup ta iki mertebelidir. Mertebesi iki olan tek bir grup vardır:  $C_2$ . O halde her iki bölüm grubu  $C_2$ 'ye izomorfiktir ve dolayısıyla birbirlerine izomorfiktirler.

**Soru 3)**  $Z_{25}$  toplamsal grubunda  $\langle 20 \rangle$  altgrubunun elemanlarını ve bu altgrubun hangi gruba izomorfik olduğunu belirleyiniz. Bu altgrup normal midir?

$Z_{25}$  toplamsal devirli grubunda  $20+20+20+20+20 = 0$  olduğundan 20 elemanın mertebesi 5'tir. 5 elemanlı tek grup  $C_5$  olduğundan  $\langle 20 \rangle$  altgrubu  $C_5$  devirli grubuna izomorfiktir. Devirli gruplar değişmeli olduklarından tüm altgrupları normal olur.

**Soru 4)**  $G$  grubu değişmeli iken  $f:G \rightarrow G$ ,  $f(x)=x^2$  bir homomorfizma olur mu?

$f(xy) = (xy)^2 = xyxy$  ve  $f(x)f(y) = x^2y^2$  dir.  $G$  değişmeli olduğundan  $xyxy = xxyy$  ve böylece  $xyxy = x^2y^2$  bulunur ve  $f$  bir homomorfizmadır.

**Soru 5)**  $D_{10}$  dihedral grubunda mertebesi 5 ve mertebesi 6 olan kaç eleman vardır? Belirleyiniz.

$D_{10}$  dihedral grubunun mertebesi 20 olup bu gruptaki elemanların mertebeleri 20'nin pozitif bölenleri olmalıdır. O halde bu grupta 6 mertebeli eleman olamaz.  $D_{10}$  grubunda mertebesi 10 olan eleman  $a$  ise,  $a^2$  elemanın mertebesinin 5 olduğu açıktır.  $(a^4)^5 = e$  olup  $a^4$  elemanın da mertebesi 5 olur. Benzer şekilde  $a^6$  ve  $a^8$  elemanlarının da beşinci mertebeden oldukları görülür. Bir başka deyişle  $a^k$  elemanın mertebesinin 5 olması için  $(k,10) = 2$  olmalıdır.

**Not:** Süre 70 dakikadır. Başarılar. İNC