MAT 1002 ANALİZ II Final Sınav Soruları 29.05.2017

Öğrenci No : ....

Adı-Soyadı : .... CEVAP ANAHTARI

Aşağıdaki soruların cevaplarını boşluklara yazınız.

1. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{16-x^2}}\,dx$ integralini hesaplayınız.

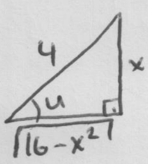
$x = 4\sin u \Rightarrow dx = 4\cos u\,du$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{16-x^2}}\,dx = \int \frac{4\cos u\,du}{16\sin^2 u\sqrt{16-16\sin^2 u}}$$

$$= \int \frac{\cos u\,du}{4\sin^2 u\sqrt{16\cos^2 u}} = \int \frac{\cancel{\cos u}\,du}{4\sin^2 u\,4\cancel{\cos u}}$$

$$= \frac{1}{16}\int \operatorname{cosec}^2 u\,du = -\frac{1}{16}\cot u + C$$

$$= -\frac{1}{16}\frac{\sqrt{16-x^2}}{x} + C$$



2. $\int x\sec^2 x\,dx =$

$x = u \Rightarrow dx = du$

$\sec^2 x\,dx = dv \Rightarrow \tan x = v$

$$\int x\sec^2 x\,dx = x\tan x - \int \tan x\,dx$$

$$= x\tan x - \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

$$= x\tan x + \ln|\cos x| + C$$

3. $y = \frac{1}{\sqrt{(x+1)(x+4)}}$, $x=0, x=2, y=0$ denklemlerinin grafikleri tarafından sınırlanan bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.

$$V = \pi\int_0^2 \left[\frac{1}{\sqrt{(x+1)(x+4)}}\right]^2 dx = \pi\int_0^2 \frac{1}{(x+1)(x+4)}\,dx$$

$$\frac{1}{(x+1)(x+4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+4} \Rightarrow A(x+4) + B(x+1) = 1$$

$x = -4 \Rightarrow -3B = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{3}$

$x = -1 \Rightarrow 3A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{3}$

$$V = \pi\left[\frac{1}{3}\int_0^2 \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3}\int_0^2 \frac{dx}{x+4}\right]$$

$$= \pi\left[\frac{1}{3}\ln|x+1|\Big|_0^2 - \frac{1}{3}\ln|x+4|\Big|_0^2\right]$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[\ln 3 - \ln 6 + \ln 4\right] = \frac{\pi}{3}\ln 2 \text{ br}^3$$

4. $\int_0^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$ integralini hesaplayınız.

$$\int_0^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$$

$\left(\arctan x = u \Rightarrow \frac{1}{1+x^2}\,dx = du\right)$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{(\arctan x)^2}{2}\right]_0^b$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[(\arctan b)^2 - (\arctan 0)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 0^2\right] = \frac{\pi^2}{8}$$

5. $[1,2]$ aralığında $y=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{8x^2}$ eğrisinin eğri uzunluğunu bulunuz.

$$y' = \frac{1}{\cancel{4}}\cancel{4}x^3 + \frac{1}{8}(-2)x^{-3} = x^3 - \frac{1}{4x^3}$$

$$(y')^2 = x^6 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^6} \Rightarrow 1+(y')^2 = \left(x^3+\frac{1}{4x^3}\right)^2$$

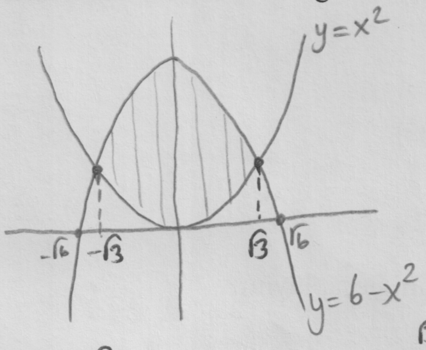
$$L = \int_1^2 \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_1^2 \left(x^3 + \frac{1}{4x^3}\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{1}{8x^2}\right]_1^2$$

$$= \left[\left(4 - \frac{1}{32} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right)\right]$$

$$= 4 - \frac{5}{32} = \frac{123}{32}\text{ br}$$

6. $y=x^2, y=6-x^2$ fonksiyonlarının grafikleri tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.



$$6-x^2=x^2$$
$$2x^2=6$$
$$x^2=3$$
$$x=\mp\sqrt{3}$$

$$A = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (6-x^2-x^2)\,dx = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (6-2x^2)\,dx$$

$$= \left[6x - \frac{2x^3}{3}\right]\Big|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}$$

$$= 6\sqrt{3} - \frac{2}{\cancel{3}}\cancel{3}\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - \frac{2\cancel{3}\sqrt{3}}{\cancel{3}}$$

$$= 12\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$$

$$= 8\sqrt{3}\text{ br}^2$$

7. Simpson Kuralı yardımıyla $n=4$ değeri için $\int_0 \frac{1}{1+x^2}dx$ integralinin yaklaşık değerini hesaplayınız.

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$S_4 = \frac{b-a}{3n}\left[f(0) + 4f\left(\frac{1}{4}\right) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 4f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1)\right]$$

$$= \frac{1}{12}\left[1 + 4\cdot\frac{16}{17} + 2\frac{4}{5} + 4\frac{16}{25} + \frac{1}{2}\right]$$

Her soru 15'er puan olup sınav süresi 80 dakikadır.

Başarılar.

Prof. Dr. İ. Naci Cangül, Arş. Gör. Dr. Aysun Yurttaş