

# MAT3020 SOYUT CEBİR FİNAL SORULARI

Ad-Soyad:...CEVAP ANAHTARI.

26.05.2017

No:.....

**Soru 1)**  $D_{24} \cong \langle x, y \mid x^{24} = y^2 = (xy)^2 = e \rangle$  grubunda mertebesi 3 ve 6 olan tüm elemanları belirleyiniz.

$D_{24}$  dihedral grubunda 24 tane dönme elemanı  $x$ 'in kuvvetleri, diğer 24 tane yansıma elemanı da bu kuvvetlerin  $y$  ile çarpımı şeklindedir. Yansımaların mertebesi 2 olduğundan aranan  $o(x) = 24$  olduğundan  $o(x^8) = 3$  olur. Çünkü  $(x^8)^3 = e$ 'dir. Teoremden de bilindiği gibi  $(8,24) = 8$  olup  $24/8 = 3$  olduğundan  $x^8$  elemanının mertebesi 3 olmaktadır. Genelleme yapacak olursak  $x$  elemanının  $(n,24) = 8$  olacak şekildeki  $n$ -inci kuvvetlerinin mertebeleri 3 olur. Bunlar da  $x^8$  ve  $x^{16}$ 'dir. Benzer şekilde  $x$  elemanının  $(n,24) = 4$  olacak şekildeki  $n$ -inci kuvvetlerinin mertebeleri 6 olur. Bunlar da  $x^4$  ve  $x^{20}$ 'dir.

**Soru 2)**  $D_{24} \cong \langle x, y \mid x^{24} = y^2 = (xy)^2 = e \rangle$  grubunda  $x^4$  ve  $x^5$  elemanlarının ikisini birden bulandıran en küçük alt grubu belirleyiniz.

Bir alt grupta  $x^4$  ve  $x^5$  elemanlarının ikisi birden bulunuyorsa alt grup ters elemanları bulundurduğundan ve kapalı olduğundan  $x^5 \cdot x^{-4} = x$  elemanını da bulundurur.  $x$  elemanı 24 mertebeli olduğundan aranan altgrup  $x$ 'in 0 ile 23 arasındaki kuvvetlerinden oluşan  $C_{24}$  devirli grubudur.

**Soru 3)** Bir  $R$  halkasında her  $a, b \in R$  için  $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$  özdeşliği geçerli midir?

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\ &= a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b \\ &= a^2 + a \cdot b + b \cdot a + b^2\end{aligned}$$

olduğu açıktır. Halka tanımı gereği herhangi bir halka çarpımına göre değişmeli olmak zorunda olmadığından bu sonuç  $a^2+2ab+b^2$  olmak zorunda değildir. Yani reel sayılar ve benzeri kümelerde tam kare açılımı olarak bildiğimiz bu özdeşlik, yapı değiştirilip değişmeli olmayan herhangi bir halka seçildiğinde geçersiz olabilir.

**Soru 4)** Devirli olmayan bir  $G$  grubunun bölüm grubu devirli olabilir mi?

Örneğin  $D_n$  dihedral grubunun yarısı büyüklüğünde bir altgrubu vardır:  $C_n$  devirli grubu. Dolayısıyla  $D_n/C_n$  bölüm grubu iki elemanlıdır. İki elemanlı tek grup  $C_2$  devirli grubudur. Yani devirli olmayan  $D_n$  grubunun devirli bir bölüm grubu olabilir.

**Soru 5)**  $f, G$  grubundan  $G'$  grubuna bir monomorfizm olsun. Her  $a \in G$  için  $o(f(a)) = o(a)$  olduğunu gösteriniz.

$f$  aynı zamanda bir homomorfizm olduğundan  $f(a^2) = f(a \cdot a) = f(a) \cdot f(a) = (f(a))^2$  elde edilir. Genelde de  $f(a^n) = (f(a))^n$  yazılabilir. Bu da eğer  $a$  elemanının mertebesi  $m$  ise yani  $a^m = e$  olacak şekildeki en küçük pozitif tamsayı  $m$  ise,

$$e' = f(e) = f(a^m) = (f(a))^m$$

olacağından  $o(f(a)) = m$  olmasını gerektirir. Yani  $f(a)$  elemanının mertebesi de  $m$ 'dir.

**Not:** Süre 70 dakikadır. Başarılar. **İNC**