MAT 1002 ANALİZ II Ara Sınav Soruları

Öğrenci No : …………………… 04.04.2017

Adı, Soyadı : ……………… CEVAP ANAHTARI

Aşağıdaki soruların cevaplarını boşluklara yazınız.

1. $\int \frac{x^5}{\sqrt[5]{x^2+4}}dx$ integralini hesaplayınız.

$x^2+4=t \Rightarrow 2x\,dx=dt$

$\int \frac{x^5}{\sqrt[5]{x^2+4}}dx = \int \frac{x^4}{\sqrt[5]{x^2+4}}\,x\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{(t-4)^2}{t^{1/5}}dt$

$= \frac{1}{2}\int \frac{t^2-8t+16}{t^{1/5}}dt = \frac{1}{2}\int (t^{9/5}-8t^{4/5}+16t^{-1/5})dt$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{5}{14}t^{14/5} - 8.\frac{5}{9}t^{9/5} + 16.\frac{5}{4}t^{4/5}\right]+C$

$= \frac{5}{28}(x^2+4)^{14/5} - \frac{40}{9}(x^2+4)^{9/5} + 20(x^2+4)^{4/5} + C$

2. $\int \sin(\ln x)\,dx =$

$\sin(\ln x)=u \Rightarrow \frac{1}{x}\cos(\ln x)dx = du$

$dx = dv \Rightarrow x = v$

$\int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - \int x\frac{1}{x}\cos(\ln x)dx$

$\int \cos(\ln x)dx =$

$\cos(\ln x)=u \Rightarrow -\frac{1}{x}\sin(\ln x)dx = du$

$dx = dv \Rightarrow x = v$

$\int \cos(\ln x)dx = x\cos(\ln x) + \int x\frac{1}{x}\sin(\ln x)dx$

$\Rightarrow \int \sin(\ln x)dx = x\sin x(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)dx$

$\Rightarrow 2\int \sin(\ln x)dx = x(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))$

$\Rightarrow \int \sin(\ln x)dx = \frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]+C$

3. $y=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{8x^2}$ fonksiyonunun grafiğinin $\lfloor 1,2 \rfloor$ aralığında x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzey alanını bulunuz.

$y' = \frac{1}{4}4x^3 + \frac{1}{8}(-2)x^{-3} = x^3 - \frac{1}{4x^3}$

$1+(y')^2 = 1 + x^6 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^6} = \left(x^3+\frac{1}{4x^3}\right)^2$

$\Rightarrow S = 2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$

$= 2\pi\int_1^2 \left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{8x^2}\right]\left[x^3+\frac{1}{4x^3}\right]dx$

$= 2\pi\int_1^2 \left[\frac{1}{4}x^7+\frac{1}{16}x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{32x^5}\right]dx$

$= 2\pi\left[\frac{1}{4}\frac{x^8}{8}+\frac{3}{16}\frac{x^2}{2}+\frac{1}{32}\frac{x^{-4}}{(-4)}\right]\Big|_1^2$

$= 2\pi\left[\frac{1}{32}.256+\frac{3}{32}.4-\frac{1}{128}.\frac{1}{16}-\frac{1}{32}-\frac{3}{32}+\frac{1}{128}\right]$

$= 2\pi\left[\frac{67}{8}-\frac{1}{2048}-\frac{1}{8}+\frac{1}{128}\right] = 2\pi\left[\frac{1057}{128}-\frac{257}{2048}\right]$

4. $\int_0^{\pi/4} \tan y \sec^4 y\,dy$ integralini hesaplayınız.

$I = \int \tan y \sec y \sec^3 y\,dy$

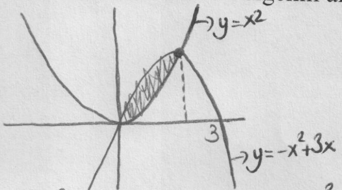
$\sec y = u \Rightarrow \sec y \tan y\,dy = du$

$I = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} = \frac{\sec^4 y}{4}$

$\Rightarrow \int_0^{\pi/4} \tan y \sec^3 y\,dy = \frac{\sec^4 y}{4}\Big|_0^{\pi/4}$

$= \frac{\left(\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^4}{4} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

5. $y=x^2$, $y=-x^2+3x$ fonksiyonlarının grafikleri tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.



$$x^2=-x^2+3x$$
$$2x^2-3x=0$$
$$x=0,\ x=\frac{3}{2}$$

$$A=\int_0^{\frac{3}{2}}\left[-x^2+3x-x^2\right]dx=\int_0^{\frac{3}{2}}\left[-2x^2+3x\right]dx$$
$$=\left[-2\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}\right]\Big|_0^{3/2}=\left[-2\cdot\frac{27}{3.8}+3\cdot\frac{9}{8}\right]$$
$$=\frac{9}{8}br^2$$

6. Beşinci sorudaki bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.

$$V=\pi\int_a^b\left[(f(x))^2-(g(x))^2\right]dx$$
$$=\pi\int_0^{\frac{3}{2}}\left[(-x^2+3x)^2-x^4\right]dx$$
$$=\pi\int_0^{\frac{3}{2}}\left[\cancel{x^4}-6x^3+9x^2-\cancel{x^4}\right]dx$$
$$=\pi\left[-\cancel{6}^{\,3}\frac{x^4}{\cancel{4}_{\,2}}+\cancel{9}^{\,3}\frac{x^3}{\cancel{3}}\right]\Big|_0^{3/2}$$
$$=\pi\left[-3\cdot\frac{81}{32}+\frac{81}{8}\right]$$
$$=\frac{81\pi}{32}br^3$$

7. $[-1,1]$ aralığı üzerinde $y=\tan^{-1}x$ ve x-ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

$$A=2\int_0^1\tan^{-1}x\,dx$$
$$\int\tan^{-1}x\,dx=\int\arctan x\,dx$$
$$\arctan x=u\Rightarrow\frac{1}{1+x^2}dx=du$$
$$dx=dv\Rightarrow x=v$$
$$\int\arctan x\,dx=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}dx$$
$$\int\frac{x}{1+x^2}dx$$
$$1+x^2=t\Rightarrow 2x\,dx=dt$$
$$\int\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|=\frac{1}{2}\ln|1+x^2|$$
$$\Rightarrow\int\arctan x\,dx=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln|1+x^2|$$
$$\Rightarrow A=2\left[x\arctan x-\frac{1}{2}\ln|1+x^2|\right]\Big|_0^1$$
$$=2\left[\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\right]$$
$$=\frac{\pi}{2}-\ln 2\ br^2$$

Her soru 15'er puan olup sınav süresi 80 dakikadır.
Başarılar.

Prof. Dr. İ. Naci Cangül, Arş. Gör. Dr. Aysun Yurttaş