MAT 1002 ANALİZ II II. Ara Sınav Soruları

Öğrenci No : ....

Adı, Soyadı : .... CEVAP ANAHTARI

16.05.2016

Aşağıdaki soruların cevaplarını boşluklara yazınız.

1. $\int \frac{e^t}{(e^t+1)^2(e^t-2)}dt$ integralini hesaplayınız.

$e^t = u \Rightarrow e^t dt = du$

$$I = \int \frac{e^t\,dt}{(e^t+1)^2(e^t-2)} = \int \frac{du}{(u+1)^2(u-2)}$$

$$\frac{1}{(u+1)^2(u-2)} = \frac{A}{u-2}_{(u+1)^2} + \frac{B}{u+1}_{(u-2)(u+1)} + \frac{C}{(u+1)^2}_{(u-2)}$$

$$A(u+1)^2 + B(u+1)(u-2) + C(u-2) = 1$$

$u=-1 \Rightarrow C = -\frac{1}{3}$

$u=2 \Rightarrow A = \frac{1}{9}$

$u=0 \Rightarrow A-2B-2C=1 \Rightarrow B = -\frac{1}{9}$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{9}\int\frac{du}{u-2} - \frac{1}{9}\int\frac{du}{u+1} - \frac{1}{3}\int\frac{du}{(u+1)^2}$$

$$= \frac{1}{9}\ln|u-2| - \frac{1}{9}\ln|u+1| + \frac{1}{3}\frac{1}{u+1} + C$$

$$= \frac{1}{9}\ln\left|\frac{u-2}{u+1}\right| + \frac{1}{3}\frac{1}{u+1} + C$$

$$= \frac{1}{9}\ln\left|\frac{e^t-2}{e^t+1}\right| + \frac{1}{3(e^t+1)} + C$$

2. $\int_2^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$ integralinin yakınsaklığını araştırınız.

Has olmayan integraldir.

$$I = \int_2^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$x = \sec t$

$dx = \sec t \tan t\, dt$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\sec t \tan t}{\sec t\sqrt{\sec^2 t-1}}dt = \int \frac{\tan t\, dt}{\tan t} = t$$

$$\Rightarrow I = \lim_{b\to\infty}\left(\operatorname{arcsec} x \Big|_2^b\right)$$

$$= \lim_{b\to\infty}(\operatorname{arcsec} b - \operatorname{arcsec} 2)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

dır. Yani integral yakınsaktır.

3. $\left\{\frac{e^n+1}{e^n}\right\}$ dizisinin limitinin $L=1$ olduğunu tanımı kullanarak gösteriniz.

Keyfi bir $\varepsilon > 0$ verilsin. $n > N$ özelliğindeki her n için

$$|a_n - L| = \left|\frac{e^n+1}{e^n} - 1\right| < \varepsilon$$

o.ş. bir N doğal sayısının olduğunun gösterilmesi gerekir. Buna göre

$$\left|\frac{e^n+1}{e^n} - 1\right| = \left|1 + \frac{1}{e^n} - 1\right| = \left|\frac{1}{e^n}\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{1}{e^n} < \varepsilon \Rightarrow e^n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

dur. Eğer N doğal sayısı $N > \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ eşitsizliğini gerçekleyecek şekilde seçilirse her $n > N$ için $|a_n - 1| < \varepsilon$ eşitsizliği gerçeklenir.

4. $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$ eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

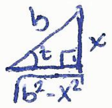
$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ elipsinin sınırladığı bölgenin alanıdır. $y^2 = a^2 - \frac{a^2x^2}{b^2}$

$$A = 4\int_0^b \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{b}x\right)^2}\,dx \qquad \frac{\cancel{a}}{b}x = \cancel{a}\sin t \Rightarrow dx = b\cos t\,dt$$

$$\int \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{b}x\right)^2}\,dx = \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\; b\cos t\,dt$$

$$= \int ab\cos^2 t\,dt = ab\int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$$

$$= \frac{ab}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right] = \frac{ab}{2}\left[t + \sin t\cos t\right]$$



$$= \frac{ab}{2}\left[\arcsin\frac{x}{b} + \frac{x}{b}\cdot\frac{\sqrt{b^2-x^2}}{b}\right]$$

$$\Rightarrow A = \cancel{4}\cdot\frac{ab}{\cancel{2}}\left[\arcsin\frac{x}{b} + \frac{x\sqrt{b^2-x^2}}{b^2}\right]\Bigg|_0^b$$

$$= 2ab\left[\arcsin(1) - \arcsin(0)\right]$$

$$= 2ab\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = \pi ab$$

5. $\int \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)dx$ integralini hesaplayınız.

$$\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = u \Rightarrow \frac{1 + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}\,dx = du$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = du$$

$$dx = dv \Rightarrow v = x$$

$$I = \int \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx = x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$x^2+1 = t^2 \Rightarrow \cancel{2}x\,dx = \cancel{2}t\,dt$$

$$\Rightarrow I = x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \int \frac{\cancel{t}\,dt}{\cancel{t}}$$

$$= x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \sqrt{x^2+1} + C$$

6. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ integralinin gerçek değeri ile $n=4$ değeri için Simpson kuralıyla elde edilen yaklaşık sonucu karşılaştırınız.

$$n = 4 \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{4}$$

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{4},\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = \frac{3}{4},\ x_4 = 1$$

$$S_4 = \frac{1}{3\cdot 4}\left[f(0) + 4f\left(\tfrac{1}{4}\right) + 2f\left(\tfrac{1}{2}\right) + 4f\left(\tfrac{3}{4}\right) + f(1)\right]$$

$$= \frac{1}{12}\left[1 + 4\cdot\frac{16}{17} + 2\cdot\frac{4}{5} + 4\cdot\frac{16}{25} + \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{12}\left[\frac{3}{2} + \frac{104}{25} + \frac{64}{17}\right]$$

$$= \frac{8011}{10200} \approx 0{,}785392$$

olur. İntegralin gerçek değeri

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x\,\Big|_0^1$$

$$= \arctan(1) - \arctan(0)$$

$$= \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785398$$

Her soru 17'şer puan olup sınav süresi 80 dakikadır. Başarılar.

Prof. Dr. İ. Naci Cangül, Arş. Gör. Dr. Aysun Yurttaş