MAT 1002 ANALİZ II I. Ara Sınav Soruları

Öğrenci No : 11.04.2016

Adı, Soyadı : .... CEVAP ANAHTARI

Aşağıdaki soruların cevaplarını boşluklara yazınız.

1. $\int \frac{2x+7}{x^2+2x+5}dx$ integralini hesaplayınız.

$$\int \frac{2x+7}{x^2+2x+5}dx = \underbrace{\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{5dx}{x^2+2x+5}}_{I_2}$$

$$I_1 = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx \qquad \begin{cases} x^2+2x+5=u \\ (2x+2)dx=du \end{cases}$$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln|x^2+2x+5|+C_1$$

$$I_2 = \int \frac{5dx}{x^2+2x+5} = 5\int \frac{dx}{(x+1)^2+4}$$

$$= \frac{5}{4}\int \frac{dx}{(\frac{x+1}{2})^2+1} \qquad \begin{cases} \frac{x+1}{2}=t \\ \frac{dx}{2}=dt \end{cases}$$

$$= \frac{5}{4}\int \frac{2dt}{t^2+1} = \frac{5}{2}\arctan t + C_2$$

$$= \frac{5}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+C_2$$

$$I = I_1 + I_2$$

$$= \ln|x^2+2x+5| + \frac{5}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$$

2. $\int_1^{64} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}+2}dx$ integralini hesaplayınız.

$$x=t^3 \Rightarrow dx = 3t^2dt$$

$$\int \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{2/3}+2}dx = \int \frac{t}{t^2+2}3t^2dt = 3\int \frac{t^3}{t^2+2}dt$$

$$= 3\int \left(t - \frac{2t}{t^2+2}\right)dt = 3\left[\int t dt - \int \frac{2t}{t^2+2}dt\right]$$

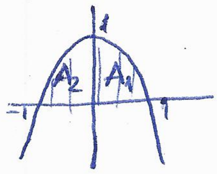
$$= 3\left[\frac{t^2}{2} - \ln|t^2+2|\right] = 3\left[\frac{x^{\frac{2}{3}}}{2} - \ln|x^{2/3}+2|\right]$$

$$\Rightarrow \int_1^{64} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{2/3}+2}dx = 3\left[\frac{x^{\frac{2}{3}}}{2} - \ln|x^{2/3}+2|\right]\Bigg|_1^{64}$$

$$= 3\left[\frac{16}{2} - \ln|18| - \frac{1}{2} + \ln|3|\right]$$

$$= \frac{45}{2} - 3\ln|6|$$

3. $y=1-x^2$ fonksiyonunun grafiğinin altında kalan alanı $[-1,1]$ aralığını n eşit parçaya bölerek ve her bir alt aralığın sağ uç noktasını alarak dikdörtgenler yardımıyla hesaplayınız.



$A=2A_1$ olduğundan $[0,1]$ aralığını alabiliriz. Bu aralığı n eşit parçaya bölersek $\Delta x_k = \frac{1}{n}$ ve her bir alt aralık $[0,\frac{1}{n}], [\frac{1}{n},\frac{2}{n}], \ldots, [\frac{n-1}{n},1]$ olur. Bu durumda $x_1^* = \frac{1}{n}, x_2^* = \frac{2}{n}, \ldots, x_k^* = \frac{k}{n}, \ldots, x_n^* = 1$ olur.

$$A(D_k) = f(x_k^*)\Delta x_k = \left(1-\frac{k^2}{n^2}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

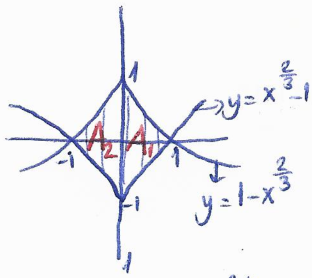
$$A(D) = \sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k^2}{n^2}\right)\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}1 - \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2}\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[n - \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$A(A_1) = \lim_{n\to\infty}\left[1 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\right] = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow A = 2A_1 = 2\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{3}br^2$$

4. $y=1-x^{2/3}$ ve $y=x^{2/3}-1$ fonksiyonlarının grafikleri tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.



$1-x^{2/3}=x^{2/3}-1$

$2=2x^{2/3}$

$x^{2/3}=1$

$x=1 \vee x=-1$

$A=A_1+A_2=2A_1$

$$A_1=\int_0^1\left[1-x^{2/3}-(x^{2/3}-1)\right]dx=\int_0^1(2-2x^{2/3})dx$$

$$=\left[2x-2x^{5/3}\cdot\frac{3}{5}\right]\Big|_0^1=\frac{4}{5}$$

$$A=2A_1=\frac{8}{5}\ br^2$$

5. $y=4-x^2$ fonksiyonunun $[0,2]$ aralığı üzerinde grafiğinin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin yüzey alanını hesaplayınız.

$y=4-x^2 \Rightarrow x^2=4-y \Rightarrow x=\sqrt{4-y}$

$f'(y)=-\dfrac{1}{2\sqrt{4-y}}$ $\quad x\to[0,2]$, $y\to[0,4]$

$$S=2\pi\int_0^4\sqrt{4-y}\sqrt{1+\frac{1}{4(4-y)}}\,dy$$

$$=\cancel{2}\pi\int_0^4\cancel{\sqrt{4-y}}\,\frac{\sqrt{17-4y}}{\cancel{2}\cancel{\sqrt{4-y}}}\,dy$$

$$=\pi\int_0^4\sqrt{17-4y}\,dy$$

$17-4y=t^2$

$-4dy=2tdt$

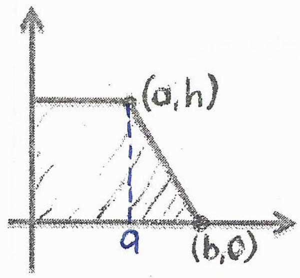
$dy=-\dfrac{tdt}{2}$

$\int\sqrt{17-4y}\,dy=-\int\dfrac{t^2dt}{2}=-\dfrac{1}{6}(17-4y)^{3/2}$

$$=\pi\left[-\frac{1}{6}(17-4y)^{3/2}\right]\Big|_0^4$$

$$=\pi\left[-\frac{1}{6}+\frac{17}{6}\right]=\frac{8\pi}{3}$$

6. Şekildeki taralı bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel cismin hacmini bulunuz.



İki noktası bilinen doğru denk.

$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_2}{x-x_2}$ $\quad (x_1,y_1)=(a,h)$, $(x_2,y_2)=(b,0)$

$\dfrac{0-h}{b-a}=\dfrac{y-0}{x-b}$

$\Rightarrow -h(x-b)=y(b-a)$

$x=b-y\dfrac{(b-a)}{h}$

Dilimleme yöntemi kullanırsak

$$V=\pi\int_0^h\left(b-y\frac{(b-a)}{h}\right)^2dy=\pi\int_0^h\left[b^2-2b\frac{(b-a)}{h}y+\frac{(b-a)^2}{h^2}y^2\right]dy$$

$$=\left[b^2y-\cancel{2}b\frac{(b-a)}{h}\frac{y^2}{\cancel{2}}+\frac{(b-a)^2}{h^2}\frac{y^3}{3}\right]\Big|_0^h$$

$$=b^2h-\frac{b(b-a)}{\cancel{h}}h^{\cancel{2}}+\frac{(b-a)^2}{3\cancel{h^2}}h^{\cancel{3}}$$

$$=\cancel{b^2h}-\cancel{b^2h}+abh+\frac{b^2h-2abh+a^2h}{3}$$

$$=abh+\frac{(b-a)^2}{3}h\ br^3$$

7. $y=\dfrac{1}{5}x^5+\dfrac{1}{12x^3}$ fonksiyonunun $[1,2]$ aralığında kalan parçasının yay uzunluğunu bulunuz.

$f'(x)=x^4-\dfrac{1}{4x^4}$

$$L=\int_1^2\sqrt{1+\left(x^4-\frac{1}{4x^4}\right)^2}\,dx=\int_1^2\sqrt{1+x^8-\frac{1}{2}+\frac{1}{16}x^{-8}}\,dx$$

$$=\int_1^2\sqrt{\left(x^4+\frac{1}{4}x^{-4}\right)^2}\,dx=\int_1^2\left(x^4+\frac{1}{4}x^{-4}\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^5}{5}+\frac{1}{4}\frac{x^{-3}}{-3}\right]\Big|_1^2=\frac{31}{5}-\frac{1}{96}+\frac{1}{12}$$

$$=\frac{31}{5}+\frac{7}{96}=\frac{3011}{480}$$

Her soru 15'er puan olup sınav süresi 80 dakikadır.
Başarılar.

Prof. Dr. İ. Naci Cangül, Arş. Gör. Dr. Aysun Yurttaş