MAT 1001 ANALİZ I Yarıyıl Sonu Sınavı Soruları

Öğrenci No : 21.01.2016

Adı, Soyadı : .... CEVAP ANAHTARI

Aşağıdaki soruların cevaplarını boşluklara yazınız.

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{\cos x}$ limitini hesaplayınız. (15P)

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{\cos x} \to \infty^0$ belirsizliği

$y=(\tan x)^{\cos x} \Rightarrow \ln y = \cos x \ln(\tan x)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \ln y = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \cos x \ln(\tan x) \to (0.\infty)$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln(\tan x)}{\frac{1}{\cos x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{1+\tan^2 x}{\tan x}}{\frac{\sin x}{\cos^2 x}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos^2 x}{\sin x}\frac{\sec^2 x}{\tan x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\cancel{\cos^2 x}}{\sin x}\frac{1}{\cancel{\cos^2 x}}\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos x}{\sin^2 x} = 0$$

$$\Rightarrow \ln \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} y = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} y = e^0 = 1$$

2. $y=\tan x^x$ fonksiyonunun grafiğinde, $x=1$ için elde edilen noktadaki teğetin denklemini bulunuz. (10P)

$y' = \sec^2 x^x . (x^x)'$

$h = x^x \Rightarrow \ln h = x \ln x \Rightarrow \frac{h'}{h} = \ln x + x.\frac{1}{x}$

$\Rightarrow h' = x^x(\ln x + 1)$

Buradan

$y' = x^x(\ln x+1)\sec^2 x^x$

olur. $(1, \tan 1)$ noktasındaki teğetin eğimi

$m_t = \sec^2 1$ olur.

Bu noktadaki teğet denklemi ise

$y - y_0 = m_t(x - x_0)$

$y - \tan 1 = \sec^2 1\,(x-1)$

olur.

3. $f(x)=x^{1/3}-x$ fonksiyonunun $[-8,1]$ aralığında Ortalama Değer Teoreminin şartlarını sağlıyorsa uygun c değerlerini bulunuz. $[-8,1]$ aralığında artan ve azalan olduğu alt aralıkları ve ekstremum noktalarını bulunuz. (15P)

f fonksiyonu $[-8,1]$ aralığında sürekli fakat dif. bilir değildir ($x=0$ da türevi yok). O.D.T. uygulanamaz.

$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} - 1 = 0$

$\Rightarrow x^{2/3} = \frac{1}{3} \Rightarrow x^2 = 1/27$

$\Rightarrow x = \mp\frac{1}{3\sqrt{3}}$ } kritik noktalar

$x = 0$

	-8		$-1/3\sqrt{3}$		0		$1/3\sqrt{3}$		1
f'		$-$		$+$		$+$		$-$	

$\left[-8, -\frac{1}{3\sqrt{3}}\right] \cup \left[\frac{1}{3\sqrt{3}}, 1\right]$ aralığında azalan

$\left[-\frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}}\right]$ aralığında artandır.

$f(-8) = (-8)^{1/3} - (-8) = 8-2 = 6$

$f(1) = 1^{1/3} - 1 = 0$

$f\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^{1/3} - 1 = a$

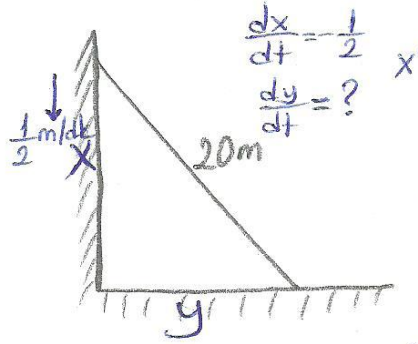
$f\left(-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right) = \left(-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^{1/3} - 1 = b$

$(-8, 6)$ noktası mutlak max.

$\left(-\frac{1}{3\sqrt{3}}, b\right)$ noktası yerel ve mutlak min.

$\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}, a\right)$ noktası yerel max.

4. 20 m uzunluğunda bir merdiven bir evin duvarına dayalı bir şekilde durmaktadır. Merdivenin üst ucu duvardan aşağıya $\frac{1}{2}$ m/dk sabit hızla kaymaya başlıyor. Merdivenin üst kısmı yerden 18 m yüksekliğe indiğinde merdivenin alt ucunun duvardan uzaklaşma hızı nedir? (15P)



$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}$$
$$\frac{dy}{dt} = ?$$

$$x^2 + y^2 = 20^2$$
$$x^2 + y^2 = 400$$
$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$
$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0$$

$x = 18$m olduğu anda
$$18^2 + y^2 = 20^2 \Rightarrow y = 2\sqrt{19} \text{ m olur.}$$
$$18 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2\sqrt{19}\frac{dy}{dt} = 0$$
$$2\sqrt{19}\frac{dy}{dt} = 9 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{9}{2\sqrt{19}}$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{9\sqrt{19}}{38} \text{ m/dk}$$

5. $\dfrac{(0,9)^4}{(0,9)^2+1}$ değerini, yaklaşım fonksiyonunu ve yerel lineer yaklaşımını kullanarak hesaplayınız. (10P)

$$f(x) = \frac{x^4}{x^2+1}, \quad a = 1 \text{ seçelim.}$$
$$f'(x) = \frac{4x^3(x^2+1) - 2x \cdot x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^5 + 4x^3}{(x^2+1)^2}$$
$$f'(1) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$
$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = f(1) + f'(1)(x-1)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}(x-1) = \frac{3}{2}x - 1$$
$$f(x) \approx \frac{3}{2}x - 1$$
$$f(0.9) = \frac{(0.9)^4}{(0.9)^2+1} \approx \frac{3}{2}(0.9) - 1 = \frac{3}{2}\cdot\frac{9}{10} - 1$$
$$= \frac{7}{20} = \underline{0.35}$$

6. Bir sanayici, alüminyumdan dik dairesel silindir şeklinde üstü açık, 64 cm^3 hacminde kutular yapmaktadır. En az alüminyum kullanması için yapacağı silindirin taban yarıçapı kaç cm olmalıdır? (15P)

$$\text{Silindirin yüzey alanı} = \underbrace{2\pi r^2}_{\text{Taban alanları}} + \underbrace{2\pi r h}_{\text{Yanal alan}}$$

$$\text{Kullanılacak alüminyumun alanı} = \pi r^2 + 2\pi r h$$

$$\pi r^2 h = 64 \Rightarrow h = \frac{64}{\pi r^2}$$
$$A(r) = \pi r^2 + 2\pi r\frac{64}{\pi r^2}$$
$$= \pi r^2 + \frac{128}{r}$$
$$A'(r) = 2\pi r - \frac{128}{r^2} = 0$$
$$\Rightarrow 2\pi r^3 = 128 \Rightarrow r^3 = \frac{64}{\pi}$$
$$\Rightarrow r = \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$$

7. $f(x)=\dfrac{x^2+5}{x+2}$ fonksiyonunun değişim tablosunu yaparak grafiğini çiziniz. (20P)

1) $T.K = \mathbb{R}-\{-2\}$

2) $x=0 \Rightarrow y=\frac{5}{2}$

$y=0 \Rightarrow$ x-eksenini kesmez.

3) $x=-2$ doğrusu düşey asimptot.

$\lim_{x\to -2^{\mp}} f(x) = \mp\infty$ dır.

$$\begin{array}{r|l} x^2+5 & x+2 \\ \hline -x^2 \mp 2x & x-2 \\ \hline -2x+5 & \\ \pm 2x \pm 4 & \\ \hline 9 & \end{array}$$

$y = x-2+\dfrac{9}{x+2}$

$g(x)=x-2$ eğik asimptot.

4) $y' = \dfrac{2x(x+2)-(x^2+5)}{(x+2)^2} = \dfrac{x^2+4x-5}{(x+2)^2}=0$

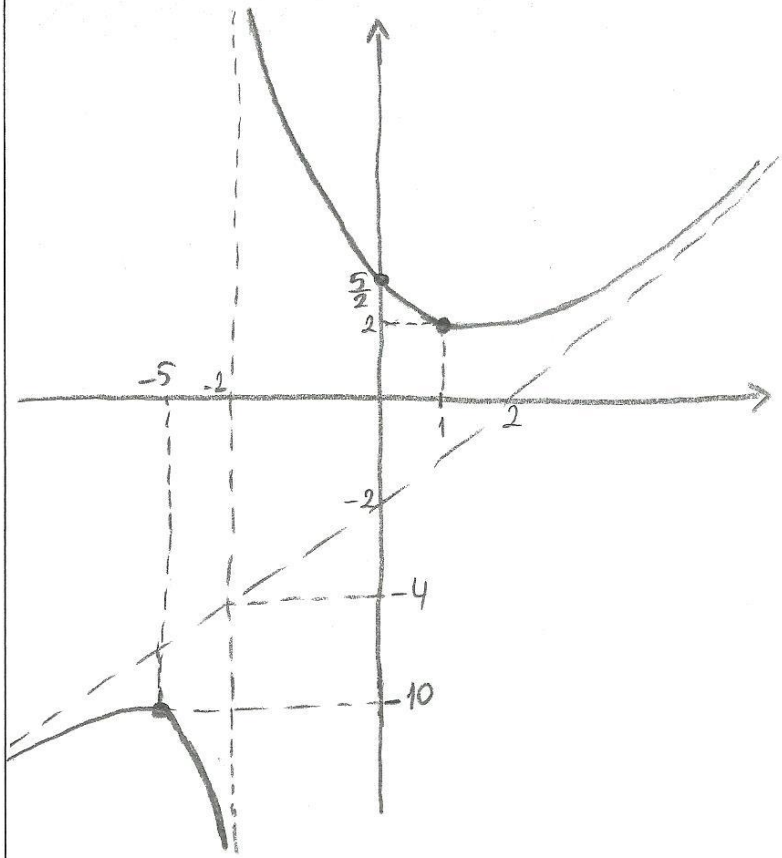
$\Rightarrow x^2+4x-5=0 \Rightarrow (x+5)(x-1)=0$

$x_1=-5,\ x_2=1$

$y_1=-10,\ y_2=2$

5)

x	$-\infty$		-5		-2		0		1		∞
f'		$+$	0	$-$	$\|$	$-$		$-$	0	$+$	
f	$g(x)$ $-\infty$	$\nearrow$	-10	$\searrow$	$-\infty$ $\|$ ∞	$\searrow$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$g(x)$ ∞



Sınav süresi 90 dakikadır. Başarılar.

Prof. Dr. İ. Naci Cangül, Arş. Gör. Dr. Aysun Yurttaş