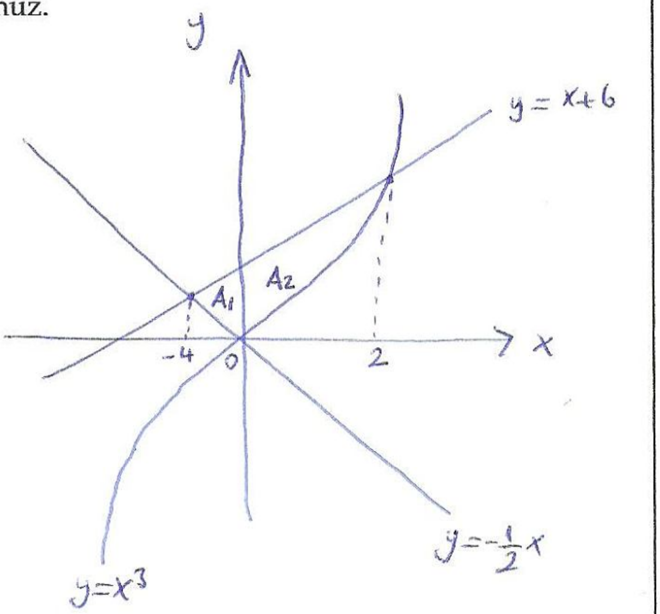
MAT 1002 ANALİZ II, Ara Sınav Soruları

Öğrenci No : .... CEVAP ANAHTARI 02.04.2015

Adı, Soyadı : ....

Aşağıdaki soruların cevaplarını boşluklara yazınız.

1. $y=x^3$, $y=x+6$ ve $y=-\dfrac{1}{2}x$ fonksiyonlarının grafikleri tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.



$A = A_1 + A_2$

$y = x^3 \wedge y = x+6 \Rightarrow x^3 = x+6 \Rightarrow x = 2$

$y = x+6 \wedge y = -\frac{1}{2}x \Rightarrow x+6 = -\frac{x}{2} \Rightarrow x = -4$

$$A_1 = \int_{-4}^{0} \left[(x+6) - \left(-\tfrac{1}{2}x\right) \right] dx = \int_{-4}^{0} \left(\frac{3x}{2} + 6 \right) dx$$

$$= \left(\frac{3}{4}x^2 + 6x \right) \Big|_{-4}^{0} = 0 - \left(\frac{3}{4}.16 - 24 \right) = 12$$

$$A_2 = \int_{0}^{2} \left[(x+6) - x^3 \right] dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_{0}^{2} = 10$$

$$A = A_1 + A_2 = 12 + 10 = 22 \ \text{br}^2$$

2. $\displaystyle\int \frac{6x-1}{4x^2+4x+10}dx$ integralini hesaplayınız.

$$I = \int \frac{6x-1}{4x^2+4x+10} dx = \int \frac{6x-1}{(2x+1)^2+9} dx$$

$u = 2x+1 \Rightarrow du = 2dx$

$2x = u - 1$

$$I = \int \frac{3(u-1)-1}{u^2+9} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int \frac{3u-4}{u^2+9} du$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\int \frac{3u}{u^2+9} du}_{} - 2 \int \frac{du}{u^2+9}$$

$u^2 + 9 = t$

$2u.du = dt$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{3}{t} \frac{dt}{2} - \frac{2}{9} \int \frac{du}{\left(1 + \left(\frac{u}{3}\right)^2\right)}$$

$$= \frac{3}{4} \ln|t| - \frac{2}{9}.3 \operatorname{Arctan}\left(\frac{u}{3}\right) + C$$

$$= \frac{3}{4} \ln|(2x+1)^2 + 9| - \frac{2}{3}.\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x+1}{3}\right) + C$$

3. $\int \cos x \ln(\sin x) dx$ integralini hesaplayınız.

$\sin x = t \Rightarrow \cos x \, dx = dt$

$$I = \int \cos x . \ln(\sin x) dx = \int \ln t \, dt$$

$u = \ln t \qquad dv = dt$

$du = \frac{1}{t} dt \qquad v = t$

$$I = t \ln t - \int t . \frac{1}{t} dt$$

$$= t.\ln t - t + C$$

$$= \sin x . \ln(\sin x) - \sin x + C$$

4. $\int \frac{\sin^3\theta}{(\cos\theta)^{3/2}}d\theta$ integralini hesaplayınız.

$$I = \int \frac{\sin^3\theta}{(\cos\theta)^{3/2}}\,d\theta = \int \frac{\sin^2\theta.\sin\theta}{(\cos\theta)^{3/2}}\,d\theta$$

$$= \int \frac{(1-\cos^2\theta)\sin\theta}{(\cos\theta)^{3/2}}\,d\theta$$

$$u = \cos\theta \Rightarrow du = -\sin\theta\, d\theta$$

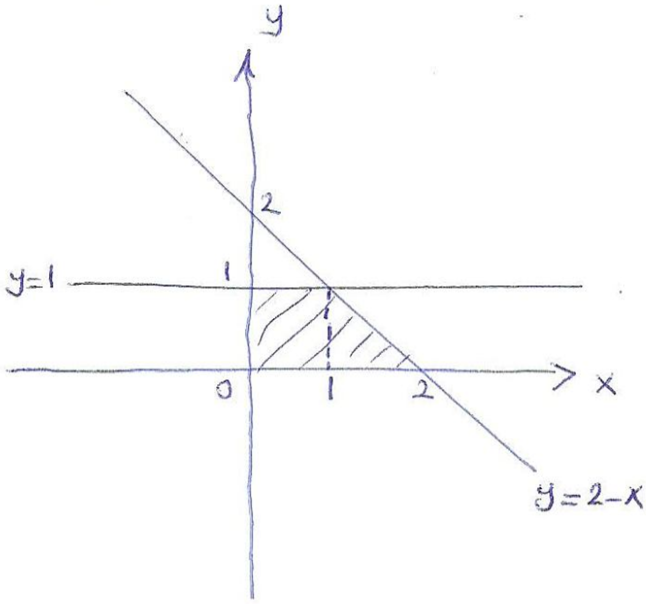
$$I = \int \frac{-(1-u^2)\,du}{u^{3/2}} = \int \frac{u^2-1}{u^{3/2}}\,du$$

$$= \int \left(u^{1/2} - u^{-3/2}\right) du$$

$$= u^{3/2}.\frac{2}{3} - u^{-1/2}(-2) + C$$

$$= \frac{2}{3}(\cos\theta)^{3/2} + \frac{2}{\sqrt{\cos\theta}} + C$$

5. $x+y=2$, $x=0$, $y=0$, $y=1$ denklemlerinin grafikleri tarafından sınırlanan bölgenin, x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.



$$V = \int_0^1 \pi.1^2dx + \int_1^2 \pi(2-x)^2dx$$

$$= \pi x \Big|_0^1 - \pi\frac{(2-x)^3}{3}\Big|_1^2$$

$$= \pi - \pi\left(0-\frac{1}{3}\right) = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}\ br^3$$

6. $\int_0^4 |2x-6|\,dx$ belirli integralini hesaplayınız.

$2x-6=0 \Rightarrow x=3$

		3	
$2x-6$	$-$	0	$+$

$$\int_0^4 |2x-6|\,dx = \int_0^3 |2x-6|\,dx + \int_3^4 |2x-6|\,dx$$

$$= \int_0^3 (6-2x)\,dx + \int_3^4 (2x-6)\,dx$$

$$= (6x-x^2)\Big|_0^3 + (x^2-6x)\Big|_3^4$$

$$= (18-9) + \left[(16-24)-(9-18)\right]$$

$$= 9-8+9$$

$$= 10$$

7. $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ için $\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$ integralini hesaplayınız.

$u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx$

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin} u + C = \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin} x^2 + C$$

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin} x^2 \Big|_0^{1/\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\operatorname{Arcsin}\frac{1}{2} - \operatorname{Arcsin} 0\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6} - 0\right)$$

$$= \frac{\pi}{12}$$

8. $\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}}\,dx$ integralini hesaplayınız.

$x = \sec t \Rightarrow dx = \sec t \cdot \tan t\,dt$

$$I = \int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{\sec^3 t \cdot \sqrt{\sec^2 t - 1}} \cdot \sec t \cdot \tan t\,dt$$

$$= \int \frac{1}{\sec^3 t \cdot \tan t} \cdot \sec t \cdot \tan t\,dt$$

$$= \int \frac{1}{\sec^2 t}\,dt = \int \cos^2 t\,dt$$

$$= \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C$$

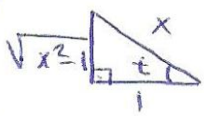
$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin t \cos t\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\left(\operatorname{Arccos}\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\right) + C$$

$x = \sec t$

$x = \frac{1}{\cos t}$

$\cos t = \frac{1}{x}$



$t = \operatorname{Arccos}\frac{1}{x}$

9. $[0,2]$ aralığında $y=4-x^2$ fonksiyonunun $y-$ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanını bulunuz.

Önce sınırları y'ye göre değiştirelim:

$x=0 \Rightarrow y=4$

$x=2 \Rightarrow y=0$ olur.

$y=4-x^2 \Rightarrow x=(4-y)^{1/2}$

$x' = -\frac{1}{2}(4-y)^{-1/2}$

$$S = 2\pi \int_0^4 (4-y)^{1/2} \sqrt{1+\left(\frac{-1}{2\sqrt{4-y}}\right)^2}\, dy$$

$$= 2\pi \int_0^4 \sqrt{4-y} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{4(4-y)}}\, dy$$

$$= \cancel{2}\pi \int_0^4 \cancel{\sqrt{4-y}} \cdot \frac{\sqrt{17-4y}}{\cancel{2}\cancel{\sqrt{4-y}}}\, dy$$

$$= \pi \cdot \underbrace{\int_0^4 (17-4y)^{1/2}\, dy}$$

$\rightarrow u = 17-4y$

$du = -4\,dy$

Belirsiz integrali hesaplayıp, sınırları en son yerine yazalım:

$$\int (17-4y)^{1/2} dy = \int u^{1/2} \frac{du}{-4} = -\frac{1}{4} u^{3/2} \cdot \frac{2}{3} + C$$

$$= -\frac{1}{6} u^{3/2} + C$$

$$= -\frac{1}{6}(17-4y)^{3/2} + C$$

$$S = -\frac{\pi}{6}(17-4y)^{3/2} \Big|_0^4$$

$$= -\frac{\pi}{6}\left[1-(17)^{3/2}\right]$$

$$= \frac{\pi}{6}\left[(17)^{3/2}-1\right]$$

10. $f(x)=2x$ fonksiyonunun grafiğinin altında kalan alanı, $[1,3]$ aralığını n eşit parçaya bölerek ve x_k^* noktalarını her bir alt aralığın sol uç noktası olarak alarak, dikdörtgenler yardımı ile hesaplayınız.

$[1,3]$ aralığını n eşit parçaya bölersek, her bir alt aralığın boyu: $\Delta x = \frac{2}{n}$ olur. x_k^* noktalarını her bir alt aralığın sol uç noktası alacağımızdan:

$x_1 = 1,\ x_2 = 1+\frac{2}{n},\ x_3 = 1+\frac{4}{n},\ x_4 = 1+\frac{6}{n}, \ldots$

$x_k = 1+\frac{2(k-1)}{n}$ bulunur.

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 2\left(1+\frac{2(k-1)}{n}\right) \cdot \frac{2}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} 1 + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}(k-1)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}\left(n + \frac{2}{n}\left(\frac{n(n+1)}{2} - n\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}(n+n+1-2)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}(2n-1)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8n-4}{n}$$

$$= 8 \text{ br}^2$$

Sınav süresi 90 dakikadır. Başarılar dileriz.

Prof. Dr. İ. Naci Cangül, Arş. Gör. Elif Çetin.