MAT 1001 ANALİZ I Bütünleme Sınavı Soruları

Öğrenci No : ……………………

22.01.2015

Adı, Soyadı : ……………………

Aşağıdaki soruların cevaplarını boşluklara yazınız.

1. $f(x)=\dfrac{10}{x}+\dfrac{x^2-4}{x-2}$ fonksiyonunun sürekliliğini inceleyiniz. Varsa süreksiz olduğu noktaları bulunuz ve süreksizlik çeşidini belirtiniz.

f fonksiyonu, $x=0$ ve $x=2$ noktasında tanımlı olmadığından bu noktalarda sürekli değildir.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{10}{x}+\frac{x^2-4}{x-2}\right)=\infty \Rightarrow \text{sonsuz süreksizlik}$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{10}{x}+\frac{x^2-4}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{10}{x}+(x+2)\right)$$

$$=9$$

$x=0$ da sonsuz süreksizlik

$x=2$ de kaldırılabilir süreksizlik

2. $\lim\limits_{\theta\to 0}(\cos 2\theta)^{1/\theta^2}$ limitini hesaplayınız.

1^∞ belirsizliği vardır.

$$y=(\cos 2\theta)^{1/\theta^2}$$

$$\ln y=\ln(\cos 2\theta)^{1/\theta^2}$$

$$\ln y=\frac{1}{\theta^2}\ln(\cos 2\theta)$$

$$\lim_{\theta\to 0}\ln y=\lim_{\theta\to 0}\frac{\ln(\cos 2\theta)}{\theta^2}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$

L'hospital

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\frac{1}{\cos 2\theta}\cdot -\sin 2\theta\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\frac{-\sin 2\theta}{\cos 2\theta}}{\theta}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$

L'Hospital

$$=\lim_{\theta\to 0}-\frac{\sec^2 2\theta\cdot 2}{1}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{-2}{\cos^2 2\theta}=-2$$

3. $y^2=x^2-4x+7$ fonksiyonunun grafiği üzerinde, o noktadaki teğetin yatay olduğu noktaları bulunuz.

Eğimin sıfır olduğu noktaları bulmalıyız.

$$2y\cdot\frac{dy}{dx}=2x-4$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x-4}{2y}=0\Rightarrow 2x=4\Rightarrow x=2$$

$$y^2=4-8+7=3\Rightarrow y=\sqrt{3}\ \vee\ y=-\sqrt{3}$$

$(2,\sqrt{3})$ ve $(2,-\sqrt{3})$ noktaları

4. $x+y=\sin y$ eşitliği için $\dfrac{d^2y}{dx^2}=?$

$$1+\frac{dy}{dx}=\cos y\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}(\cos y-1)=1$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y-1}=(\cos y-1)^{-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-(\cos y-1)^{-2}(-\sin y)\frac{dy}{dx}$$

$$=\frac{\sin y}{(\cos y-1)^2}\cdot\frac{1}{(\cos y-1)}$$

$$=\frac{\sin y}{(\cos y-1)^3}$$

5. $f'(c)=[f(b)-f(a)]/(b-a)$ olacak şekilde $(-1,8)$ aralığında bir c sayısı bulunabildiği halde $f(x)=x^{1/3}$ fonksiyonunun $[-1,8]$ aralığında Ortalama Değer Teoremi'nin hipotezini sağlamadığını gösteriniz. Nedenini açıklayınız.

$f(x)=x^{1/3}$ fonksiyonu $x=0$ da diferansiyellenebilir olmadığından Ortalama Değer Teoreminin hipotezini sağlamaz.

6. Grafiği $(-1,0)$ dan geçen ve büküm noktası $(1,1)$ olan $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ için a,b ve c değerlerini bulunuz.

Grafik $(-1,0)$ dan geçtiğine göre, bu noktayı sağlar:

$$\boxed{-a+b-c=0}$$

Büküm noktasını bulalım:

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

$$f''(x)=6ax+2b=0 \Rightarrow x=\frac{-b}{3a}=1 \Rightarrow \boxed{-b=3a}$$

Büküm noktası $(1,1)$, grafik üzerinde olduğundan denklemi sağlar:

$$\boxed{a+b+c=1}$$

Bulduğumuz eşitliklerden;

$$\begin{array}{rl} & -a+b-c=0 \\ + & a+b+c=1 \\ \hline & 2b=1 \Rightarrow b=\frac{1}{2} \end{array}$$

$-b=3a$ olduğundan $a=-\frac{1}{6}$

$-a+b-c=0$ olduğundan $c=\frac{2}{3}$

bulunur.

7. $\sqrt{10}$ sayısının değerini yaklaşık olarak bulmak için Newton Metodu'nu kullanınız.

$x=\sqrt{10} \Rightarrow x^2=10 \Rightarrow x^2-10=0$

$f(x)=x^2-10$ fonksiyonunu tanımlayalım. $f'(x)=2x$ olur.

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$x_0=3$ için,

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=3-\frac{f(3)}{f'(3)}$$

$$=3-\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{19}{6}=3{,}166$$

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=\frac{19}{6}-\frac{f(19/6)}{f'(19/6)}$$

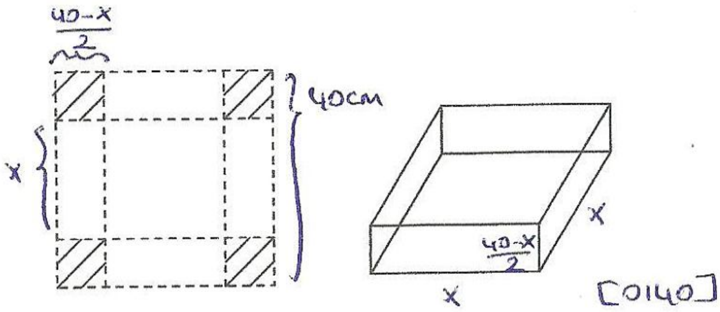
$$=\frac{19}{6}-\frac{\left(\frac{19}{6}\right)^2-10}{2.\frac{19}{6}}$$

$$=\frac{721}{228}=3{,}162$$

$\vdots$

$\sqrt{10}\approx 3{,}16$

8. Üstü açık bir kutu, kare bir kartonun köşelerinden kare parçalar kesilip birleştirilmesiyle yapılacaktır. Şekilde taralı kareler çıkarılıp kartonun kalan kısımlarının birleştirilmesiyle kutu elde edilmiştir. Kartonun bir kenar uzunluğu 40 cm olduğuna göre maksimum hacimli kutunun boyutlarını bulunuz. Maksimum hacim nedir?



$$V=x^2\cdot\frac{40-x}{2}=\frac{40x^2-x^3}{2}$$

$$V'(x)=\frac{80x-3x^2}{2}=0$$

$\Rightarrow x(80-3x)=0$

$\Rightarrow x=0 \ \vee \ x=\frac{80}{3}$

$[0,40]$ aralığında tanımlı olduğundan uç noktaları da kontrol edelim:

$V(0)=0$, $V(40)=0$

$$V\left(\frac{80}{3}\right)=\left(\frac{80}{3}\right)^2\left(40-\frac{80}{3}\right)\frac{1}{2}=\frac{128000}{27}$$

Kutunun boyutları;

$x=\frac{80}{3}$, $y=\frac{40-x}{2}=\frac{20}{3}$ olmalıdır.

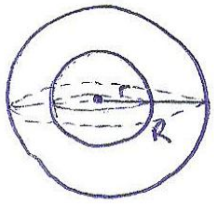
Maksimum hacim ise

$V\left(\frac{80}{3}\right)=\frac{128000}{27}$ dm.

9. Ortak merkezli iki küre arasındaki V hacmi büyümektedir. Dışarıdaki kürenin yarıçapı 2 m/h hızla artarken, içteki kürenin yarıçapı ise 1/2 m/h hızla azalmaktadır. Buna göre dıştaki kürenin yarıçapı 3 m ve içteki kürenin yarıçapı 1 m olduğunda V hacminin değişim oranı kaçtır?

R: Büyük kürenin yarıçapı

r: Küçük kürenin yarıçapı



$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dR}{dt} = 2, \quad \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{2}$$

$$R = 3, \; r = 1, \; \frac{dV}{dt} = ?$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi 3R^2 \cdot \frac{dR}{dt} - \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$= 4\pi \cdot 9 \cdot 2 + 4\pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 72\pi + 2\pi$$

$$= 74\pi$$

10. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$ fonksiyonunun değişim tablosunu yaparak grafiğini çiziniz.

1) Tanım Kümesi: $\mathbb{R} - \{\mp 2\}$

2) $x=0 \Rightarrow y=0$

$y=0 \Rightarrow x=0$

3) Düşey Asimptot $x=-2$ ve $x=2$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2}{x^2-4} = \infty$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2}{x^2-4} = \infty$$

olduğundan $x=-2$ ve $x=2$ düşey asimptottur.

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^2}{x^2-4} = 1$$ olduğundan

$y=1$ doğrusu yatay asimptottur.

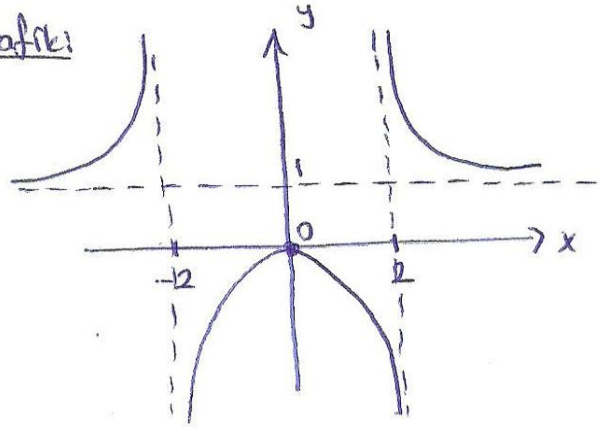
4) $$y' = \frac{2x(x^2-4) - 2x(x^2)}{(x^2-4)^2} = \frac{-8x}{(x^2-4)^2} = 0$$

$\Rightarrow x=0$ da $y'=0$ olduğundan yerel ekstremumdur.

5) Tablo:

x	$-\infty$	0	∞
y'	+	0	—
y	↗	max	↘

6) Grafik:



Sınav süresi 90 dakikadır. Başarılar.

Prof. Dr. İ. Naci Cangül, Arş. Gör. Elif Çetin