MAT 1001 ANALİZ I Final Sınavı Soruları

05.01.2015

Öğrenci No : ……………………

Adı, Soyadı : ……………………

CEVAP ANAHTARI

Aşağıdaki soruların cevaplarını boşluklara yazınız.

1. $$f(x)=\begin{cases} mx-n, & x<1 \\ 5, & x=1 \\ 2mx+n, & x>1 \end{cases}$$

fonksiyonu tüm $\mathbb{R}$ de sürekli olacak şekilde m ve n sayılarını bulunuz.

f(x) fonksiyonunun sürekli olmayabileceği tek nokta x=1 noktasıdır. Eğer f fonksiyonu x=1 de tanımlı, limiti var ve tanım değeri ile limit değeri eşit ise süreklidir. Buna göre

$f(1)=5$

$\lim_{x\to 1^-}(mx-n)=5$ olmalı $\Rightarrow m-n=5$

$\lim_{x\to 1^+}(2mx+n)=5$ olmalı $\Rightarrow 2m+n=5$

$+$

$3m=10$

$\Rightarrow m=\frac{10}{3}$ ve $n=-\frac{5}{3}$ olmalıdır.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2\sin^2(2/x)}$ limitini hesaplayınız.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x^2}}{\sin^2(2/x)}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$ belirsizliği var.

L'Hopital kuralı uygulanırsa;

$$\overset{h.}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{2}{x^3}}{\underbrace{2.\sin(2/x).\cos(2/x)}_{\sin(4/x)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\sin(4/x)}$$

$$\overset{h.}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}}{\cos\frac{4}{x}.\frac{-4}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}-\frac{1}{x^2}.\frac{x^2}{-4}.\frac{1}{\cos\frac{4}{x}}$$

$$=\frac{1}{4}$$

3. $x^2-xy+y^2=3$ fonksiyonunun grafiği üzerinde, o noktadaki teğetin yatay olduğu noktaları bulunuz.

Eğimin sıfır olduğu noktayı bulmalıyız.

Kapalı türev alınırsa,

$$2x-\left(y+x.\frac{dy}{dx}\right)+2y.\frac{dy}{dx}=0$$

$$2x-y-x.\frac{dy}{dx}+2y.\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}(2y-x)=y-2x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-2x}{2y-x}=0 \Rightarrow y=2x$$

fonksiyonda yerine yazılırsa,

$$x^2-x.2x+(2x)^2=3 \Rightarrow x^2-2x^2+4x^2=3$$

$$\Rightarrow 3x^2=3 \Rightarrow x=1 \lor x=-1$$

$x=1 \Rightarrow y=2$ $\quad (1,2)$

$x=-1 \Rightarrow y=-2$ $\quad (-1,-2)$ $\Big\}$ noktaları

4. $x^2+y^2=\ln(x+y)^2$ eşitliği için $\dfrac{dy}{dx}=?$

Kapalı türev alınırsa,

$$2x+2y\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(x+y)^2}\cdot 2(x+y)\cdot\left(1+\frac{dy}{dx}\right)$$

$$2x+2y\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{2}{(x+y)}+\frac{2}{(x+y)}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}\left(2y-\frac{2}{x+y}\right)=\frac{2-2x^2-2xy}{x+y}$$

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{2xy+2y^2-2}{x+y}=\frac{2-2x^2-2xy}{x+y}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2-2x^2-xy}{x+y}\cdot\frac{x+y}{2xy+2y^2-2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-x^2-xy}{xy+y^2-1}$$

5. $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ fonksiyonunun $[-2,-1]$ aralığında Ortalama Değer Teoreminin hipotezini sağlayıp sağlamadığını araştırınız. Eğer sağlıyorsa teoremin sonucunu sağlayan tüm c değerlerini bulunuz.

f fonksiyonu $\mathbb{R}-\{1\}$ de tanımlı olduğundan $[-2,-1]$ aralığında tanımlıdır ve süreklidir. Ayrıca f fonksiyonu $(-2,-1)$ aralığında diferansiyellenebilirdir. O halde Ortalama Değer Teoremi uygulanabilir.

$$f'(x)=\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$f'(c)=\frac{f(-1)-f(-2)}{-1-(-2)}$$

$f(-1)=0$
$f(-2)=1/3$

$$\frac{-2}{(c-1)^2}=\frac{0-1/3}{1}=-\frac{1}{3}$$

$(c-1)^2=6 \Rightarrow c^2-2c-5=0$

$\Delta=4+4.5=24 \qquad c_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{24}}{2}=1\pm\sqrt{6}$

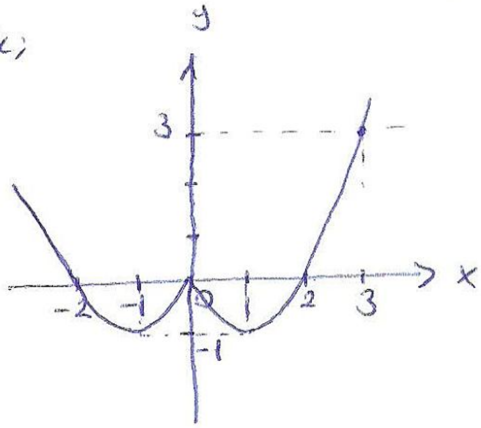
$c=1-\sqrt{6}$ olmalıdır.

6. $f(x)=x^2-2|x|$ fonksiyonunun $[-2,3]$ aralığında, tüm ekstremum noktalarını (yerel, mutlak) bulunuz.

$f(x)$ fonksiyonunu parçalı fonksiyon olarak yazarsak;

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x, & [-2,0) \\ 0, & x=0 \\ x^2-2x, & (0,3] \end{cases}$$

olarak düşünebiliriz. Kabaca grafiğini çizersek;



$f(0)=0$ yerel minimum.

$f(-1)=f(1)=-1$ mutlak minimum

$f(3)=3$ mutlak maksimum.

7. $\dfrac{(0,9)^4}{(0,9)+1}$ değerini, yaklaşım fonksiyonunu ve yerel lineer yaklaşımını kullanarak hesaplayınız.

$f(x) = \dfrac{x^4}{x+1}$ $\quad a=1$ seçelim.

$$f'(x) = \frac{4x^3(x+1) - x^4}{(x+1)^2} = \frac{3x^4+4x^3}{(x+1)^2}$$

$$f'(1) = \frac{7}{4}$$

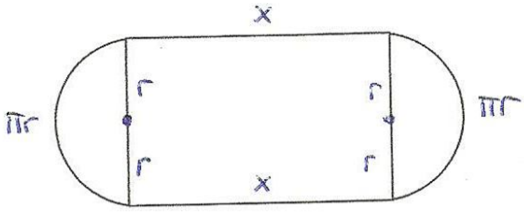
$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$
$$= f(1) + f'(1)(x-1)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{7}{4}(x-1)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{7}{4}x - \frac{7}{4}$$
$$= \frac{7}{4}x - \frac{5}{4}$$

$$f(x) \approx \frac{7x}{4} - \frac{5}{4}$$

$x = 0,9$ için

$$f(0,9) = \frac{(0,9)^4}{(0,9)+1} \approx \frac{7}{4} \cdot 0,9 - \frac{5}{4}$$
$$= \frac{7}{4} \cdot \frac{9}{10} - \frac{5}{4}$$
$$= \frac{63-50}{40}$$
$$= \frac{13}{40}$$
$$= 0,325$$

8.



Şekilde verilen koşu pisti, paralel iki düz çizgiyle birleştirilmiş, iki yarım daire şeklindeki alanlardan oluşmaktadır. Pistin uzunluğu 2 km dir. Pistin ortasındaki dikdörtgensel bölgenin alanının maksimum olması için pist nasıl yapılmalıdır?

$$2\pi r + 2x = 2 \Rightarrow \pi r + x = 1 \Rightarrow r = \frac{1-x}{\pi}$$

$$A = 2rx$$

$$A(x) = \frac{2}{\pi}(1-x) \cdot x = \frac{2}{\pi}(x - x^2)$$

$$A'(x) = \frac{2}{x}(1-2x) = 0$$

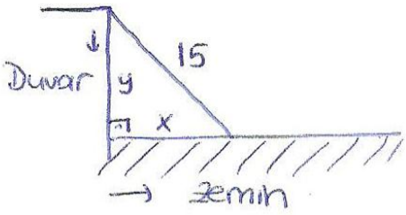
$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$ kritik nokta

$$A''(x) = \frac{-4}{\pi} < 0 \Rightarrow A''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-4}{\pi} < 0$$

olduğundan $x = \frac{1}{2}$ yerel maksimumdur.

$x = \frac{1}{2}$ için $r = \frac{1-x}{\pi} \Rightarrow r = \frac{1}{2\pi}$ olmalıdır.

9. 15 ft uzunluğunda bir merdiven bir evin duvarına dayalı bir şekilde dururken, yavaşça kaymaya başlıyor. Merdivenin alt ucu duvardan sabit 2 ft/dk hızla uzaklaşmaktadır. Merdivenin alt ucu duvardan 5 ft uzaklaştığında merdivenin üst ucunun duvardan aşağıya doğru kayma hızı nedir?



$$\frac{dx}{dt} = 2 \text{ ft/dk}$$

$x=5$ olduğunda

$$\frac{dy}{dt} = ?$$

$$x^2+y^2=(15)^2$$

$$2x\cdot\frac{dx}{dt} + 2y\cdot\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow 2x\cdot\frac{dx}{dt} + 2\cdot\sqrt{225-x^2}\,\frac{dy}{dt} = 0$$

$$2\cdot5\cdot2 + 2\cdot\sqrt{225-25}\,\frac{dy}{dt} = 0$$

$$20 + 20\sqrt{2}\,\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ft/dk}$$

10. $f(x)=\dfrac{x^2}{x^4+1}$ fonksiyonunun değişim tablosunu yaparak grafiğini çiziniz.

1) Tanım kümesi : $\mathbb{R}$

2) Eksenleri kestiği noktalar:

$x=0 \Rightarrow y=0$

$y=0 \Rightarrow x=0$

3) Asimptotlar:

D.A. $\Rightarrow$ paydayı sıfır yapan değer olmadığından yoktur.

Y.A $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^4+1} = 0$ $\quad y=0$ yatay asimptot.

4) Türev:

$$y' = \frac{2x(x^4+1) - x^2(4x^3)}{(x^4+1)^2}$$

$$= \frac{2x^5+2x-4x^5}{(x^4+1)^2} = 0$$

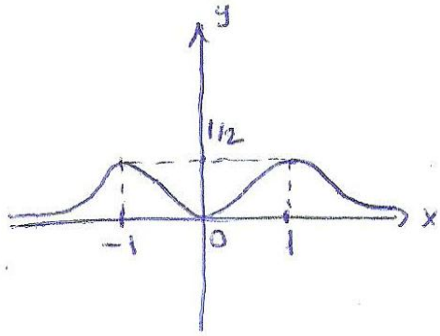
$$\Rightarrow \frac{2x(1-x)(1+x)(1+x^2)}{(x^4+1)^2} = 0$$

$x=1$, $x=0$ ve $x=-1$ yerel ekstremumlar

5) Tablo:

x	$-\infty$	-1		0		1		∞
y'	+	0	−	0	+	0	−	
y	↗	max	↘	min	↗	max	↘	

6) Grafik:



Sınav süresi 90 dakikadır. Başarılar.

Prof. Dr. İ. Naci Cangül, Arş. Gör. Elif Çetin