MAT 1001 ANALİZ I, Ara Sınav Soruları

Öğrenci No : .... CEVAP ANAHTARI 13.11.2014

Adı, Soyadı : ....

Aşağıdaki soruların cevaplarını boşluklara yazınız.

1. $f(x)=\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$ fonksiyonunun sürekli olduğu aralığı bulunuz. Eğer süreksiz olduğu noktalar varsa süreksizlik çeşidini belirtiniz.

f(x) rasyonel bir fonksiyon olduğundan, paydayı sıfır yapan değerlerde, tanımlı olmayacağından sürekli olmaz. Dolayısıyla $\sqrt{x}-3=0 \Rightarrow \sqrt{x}=3 \Rightarrow x=9$ da sürekli değildir. Fonksiyonun sürekli olduğu aralık, $[0,9)\cup(9,\infty)$ aralığıdır.

Süreksizlik çeşidini bulalım:

$$\lim_{x\to 9^+}\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}=\frac{(\cancel{\sqrt{x}-3})(\sqrt{x}+3)}{\cancel{\sqrt{x}-3}}=6$$

$$\lim_{x\to 9^-}\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}=\frac{(\cancel{\sqrt{x}-3})(\sqrt{x}+3)}{\cancel{\sqrt{x}-3}}=6$$

olduğundan $\lim\limits_{x\to 9}f(x)=6$ dır. Yani limit vardır. Ancak $x=9$ noktasında fonksiyon tanımlı olmadığı için fonksiyonun bu noktada kaldırılabilir süreksizliği vardır.

2. $f(x)=x^2+x+1$ fonksiyonu için $[-2,3]$ aralığında Ara Değer Teoremi uygulanabilir mi? Neden? Eğer uygulanabilirse, $f(c)=6$ olacak şekilde c sayısını bulunuz.

$f(x)=x^2+x+1$ polinom fonksiyonu $[-2,3]$ aralığı üzerinde süreklidir ve $f(-2)=3$, $f(3)=13$ olup $f(-2)\neq f(3)$ tür. $3\le N\le 13$ olacak şekildeki herhangi bir N sayısı için Ara Değer Teoremi, $f(c)=N$ yani $c^2+c+1=N$ denkleminin $[-2,3]$ aralığı içinde bir çözümünü garanti eder. Özel olarak $N=6$ seçersek, bu durumda $c^2+c+1=6 \Rightarrow c^2+c-5=0$

$$\Delta=1^2-4.1(-5)=21$$

$c_1=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$, $c_2=\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$ bulunur.

Denklemin iki çözümü olmasına rağmen sadece $c_1=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$ değeri -2 ile 3 arasındadır.

3. $\lim_{x\to 0} x^2 \cos\frac{\pi}{x} = 0$ olduğunu Sıkıştırma Teoremi yardımıyla gösteriniz.

$x \neq 0$ için $-1 \leq \cos\frac{\pi}{x} \leq 1$ olduğunu biliyoruz. Buradan,

$-1 \leq \cos\frac{\pi}{x} \leq 1 \Rightarrow -x^2 \leq x^2 \cdot \cos\frac{\pi}{x} \leq x^2$

bulunur. $\lim_{x\to 0}(-x^2) = 0$ ve $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$

olduğundan Sıkıştırma Teoremi gereği $\lim_{x\to 0} x^2 \cdot \cos\frac{\pi}{x} = 0$ elde edilir.

4. $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi/x)}{x-1}$ limitini hesaplayınız.

Burada $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$\frac{\pi}{x} = t$ değişken değişimi yapalım.

O halde $x \to 1$ için $t \to \pi$ olacaktır.

Bu durumda

$$\lim_{t\to\pi}\frac{\sin t}{\frac{\pi}{t}-1} = \lim_{t\to\pi}\frac{\sin t}{\frac{\pi-t}{t}} = \lim_{t\to\pi}\frac{\sin t}{\pi-t}$$

$$= \lim_{t\to\pi}\frac{\sin(\pi-t)}{\pi-t}\cdot t \; ; \quad \begin{matrix}\pi-t=k \\ t\to\pi \\ k\to 0\end{matrix}$$

$$= \lim_{k\to 0}(\pi-k)\cdot\frac{\sin k}{k}$$

$$= \underbrace{\lim_{k\to 0}(\pi-k)}_{\pi}\cdot\underbrace{\lim_{k\to 0}\frac{\sin k}{k}}_{1}$$

$$= \pi$$

5. $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x^2-1}}$ fonksiyonunun tüm yatay ve düşey asimptotlarını bulunuz.

Düşey asimptotları bulmak için, paydayı sıfır yapan noktaları kontrol ediyoruz.

$\sqrt{x^2-1} = 0 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x=1 \vee x=-1$

$\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{\sqrt{x^2-1}} = \infty$, $\lim_{x\to -1}\frac{x+3}{\sqrt{x^2-1}} = \infty$

olduğundan $x=1$ ve $x=-1$ doğruları $f(x)$ fonksiyonu için düşey asimptottur.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x+3}{\sqrt{x^2}}}{\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x+3}{|x|}}{\sqrt{1-\cancel{\frac{1}{x^2}}^{\,0}}} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+3}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x+3}{\sqrt{x^2}}}{\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x+3}{|x|}}{\sqrt{1-\cancel{\frac{1}{x^2}}^{\,0}}} = -1$$

olduğundan $y=1$ ve $y=-1$ doğruları $f(x)$ fonksiyonu için yatay asimptottur.

6. $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2+4)=12$ olduğunu limitin tanımı yardımıyla gösteriniz.

Herhangi bir $\varepsilon>0$ sayısı verilsin.

$0<|x-2|<\delta$ özelliğindeki x değişkenleri için $|2x^2+4-12|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısının olduğunun gösterilmesi gerekir.

$$|2x^2-8| = 2|(x^2-4)| = 2|(x-2)(x+2)|$$

$$\leq 2|x-2|.|x+2|$$

$$< 2\delta(\delta+4) < \varepsilon$$

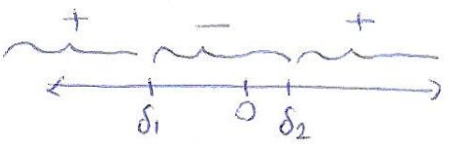
veya $2\delta^2+8\delta-\varepsilon<0$ eşitsizliğinden

$$\delta_{1,2} = \frac{-8\pm\sqrt{64+8\varepsilon}}{4} = \frac{-8\pm 2\sqrt{16+2\varepsilon}}{4}$$

Dolayısıyla,

$$\delta_1 = \frac{-8-2\sqrt{16+2\varepsilon}}{4} \quad \text{ve} \quad \delta_2 = \frac{-8+2\sqrt{16+2\varepsilon}}{4}$$

bulunur.



$2\delta^2+8\delta-\varepsilon<0$

olacağından bu aralıkta seçim yapmalıyız.

Ancak $\delta>0$ olması gerektiğinden $0<\delta<\delta_2$ olacak şekildeki her δ için istenen sonuç elde edilir.

7. $f(x)=6\sqrt{x}+2$ fonksiyonunun türevini, türev tanımı yardımı ile hesaplayınız. Daha sonra $f(x)$ fonksiyonunun $-x+y=2$ doğrusuna paralel olduğu noktaları bulunuz.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{6\sqrt{x+h}+2-(6\sqrt{x}+2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{6\sqrt{x+h}-6\sqrt{x}}{h}$$

$$= 6.\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$= 6.\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{6}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{\sqrt{x}}$$

$-x+y=2$ doğrusuna paralel olması için, eğimlerinin eşit olması gerekir.

$y=x+2$ olduğundan $m_t=1$ dir.

$$m_t = \frac{3}{\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow \sqrt{x}=3 \Rightarrow x=9$$

$$f(9) = 6\sqrt{9}+2 = 20$$

yani $(9,20)$ noktasında f fonksiyonu verilen doğruya paraleldir.

8. A ve B katsayılarını öyle bulunuz ki $y = Ax^2 + Bx$ fonksiyonu $2y'' + 3y' = x - 1$ diferansiyel denklemini sağlasın.

$y' = 2Ax + B$ ve $y'' = 2A$ olduğundan bu değerleri verilen denklemde yerine yazarsak,

$2y'' + 3y' = x - 1$

$\Rightarrow 2(2A) + 3(2Ax + B) = x - 1$

$\Rightarrow 4A + 6Ax + 3B = x - 1$

$\Rightarrow 4A + 3B = -1$

$6A = 1 \rightarrow A = 1/6 \quad B = -5/9$

9. $f(x) = \dfrac{x}{1 + \sin x}$ fonksiyonunun grafiğinin $x = \pi/2$ deki değerine karşılık gelen noktasındaki normalinin denklemini bulunuz.

$$f'(x) = \frac{1.(1+\sin x) - x.(\cos x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{1+\sin x - x.\cos x}{(1+\sin x)^2}$$

$$f'(\pi/2) = \frac{2 - \pi/2.0}{2^2} = \frac{1}{2} = m_t$$

$m_t . n_t = -1 \Rightarrow n_t = -2$

$x = \pi/2 \Rightarrow y = \dfrac{\pi/2}{1+1} = \dfrac{\pi}{4}$

$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ den geçen ve eğimi $n_t = -2$ olan normal denklemi,

$$y - \frac{\pi}{4} = -2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

10. $2y^2 + 2xy - 1 = 0$ denklemi için $\dfrac{dy}{dx}$ in, $x = \dfrac{1}{2}$ ye karşılık gelen noktadaki değerini bulunuz.

Kapalı fonksiyonun türevinden,

$$4y.\frac{dy}{dx} + 2y + 2x.\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(4y + 2x) = -2y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{2y + x}$$

$x = \frac{1}{2}$ için $2y^2 + 2xy - 1 = 0$ denkleminden $y = \frac{1}{2} \vee y = -1$ bulunur.

$x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1/2}{1 + 1/2} = -\dfrac{1}{3}$

$x = \frac{1}{2}, y = -1 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{-2 + \frac{1}{2}} = -\dfrac{2}{3}$

Sınav süresi 90 dakikadır. Başarılar.

Prof. Dr. İ. Naci Cangül, Arş. Gör. Elif Çetin