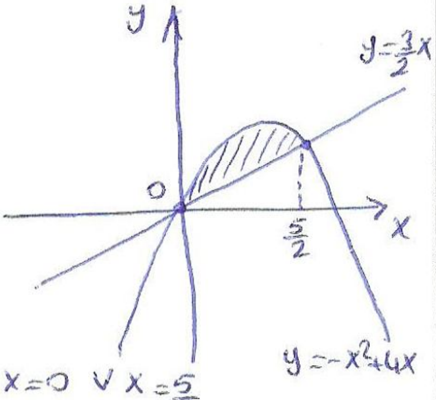
MAT 1002 ANALİZ II, Final Soruları

Öğrenci No : …………………… 28.08.2014

Adı, Soyadı : ……………………

Aşağıdaki soruların cevaplarını boşluklara yazınız.

1. $y=-x^2+4x$ ve $y=\dfrac{3}{2}x$ fonksiyonlarının grafikleri tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.



Kesim noktaları;

$-x^2+4x=\dfrac{3x}{2}$

$\Rightarrow x^2-\dfrac{5x}{2}=0$

$\Rightarrow x\left(x-\dfrac{5}{2}\right)=0 \Rightarrow x=0 \vee x=\dfrac{5}{2}$

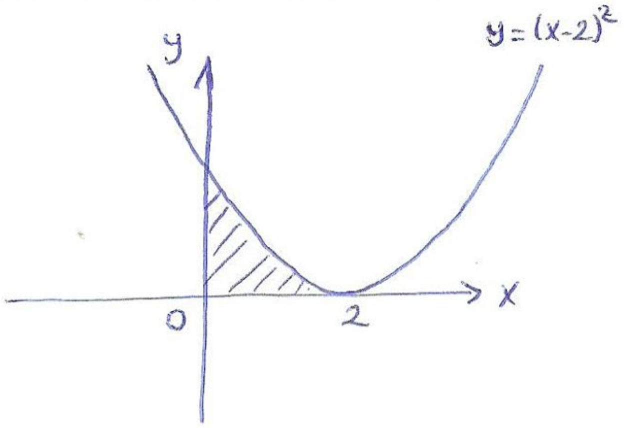
$A=\displaystyle\int_0^{5/2}\left[(-x^2+4x)-\frac{3x}{2}\right]dx$

$=\displaystyle\int_0^{5/2}\left(-x^2+\frac{5x}{2}\right)dx$

$=\left(-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{5/2}=-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{125}{8}+\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{25}{4}$

$=\dfrac{125}{48}$

2. $y=(x-2)^2$, $x=0$ ve $y=0$ denklemlerinin grafikleri tarafından sınırlanan bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini dilimleme metodu ile bulunuz.



$y=0 \Rightarrow 0=(x-2)^2 \Rightarrow x=2$

$V=\pi\displaystyle\int_0^2\left[(x-2)^2\right]^2dx$

$=\pi\displaystyle\int_0^2(x-2)^4dx$

$=\pi\cdot\dfrac{(x-2)^5}{5}\Big|_0^2=\pi\left(0+\dfrac{32}{5}\right)$

$=\dfrac{32\pi}{5}$

3. $[1,5]$ aralığında $y=\sqrt{x+1}$ fonksiyonunun grafiğinin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzey alanını bulunuz.

$y=(x+1)^{1/2} \Rightarrow y'=\dfrac{1}{2}(x+1)^{-1/2}$

$S=2\pi\displaystyle\int_1^5(x+1)^{1/2}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)^2}\,dx$

$=2\pi\displaystyle\int_1^5(x+1)^{1/2}\sqrt{1+\frac{1}{4(x+1)}}\,dx$

$=\cancel{2}\pi\displaystyle\int_1^5\cancel{(x+1)^{1/2}}\cdot\frac{\sqrt{4x+5}}{\cancel{2}\cancel{\sqrt{x+1}}}\,dx$

$=\pi\displaystyle\int_1^5(4x+5)^{1/2}dx$

$=\pi\cdot\dfrac{1}{6}(4x+5)^{3/2}\Big|_1^5$

$=\dfrac{49\pi}{3}$

$u=4x+5$
$du=4dx$
$\displaystyle\int(4x+5)^{1/2}dx$
$=\displaystyle\int u^{1/2}\frac{du}{4}$
$=\dfrac{1}{4}\cdot u^{3/2}\cdot\dfrac{2}{3}$
$=\dfrac{1}{6}u^{3/2}$

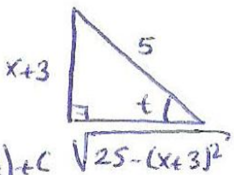
4. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{16-6x-x^2}}dx$ integralini hesaplayınız.

$$\int \frac{2x+5}{\sqrt{16-6x-x^2}}dx = \int \frac{2x+5}{\sqrt{25-(x+3)^2}}dx \; ; \quad \begin{array}{l} x+3 = 5\sin t \\ dx = 5\cos t\, dt \end{array}$$

$$= \int \frac{2(5\sin t - 3) + 5}{\sqrt{25 - 25\sin^2 t}} . 5\cos t\, dt$$

$$= \int \frac{10\sin t - 1}{\cancel{5}.\cancel{\cos t}} . \cancel{5}\cancel{\cos t}\, dt$$

$$= -10\cos t - t + C$$



$$= -10 . \frac{\sqrt{25-(x+3)^2}}{5} - \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x+3}{5}\right) + C$$

5. $\int x^2 Arc\tan x dx$ integralini hesaplayınız.

Kısmi integrasyon uygulayalım:

$u = \operatorname{Arctan} x \qquad dv = x^2 dx$

$du = \frac{1}{1+x^2}dx \qquad v = \frac{x^3}{3}$

$$\int x^2 \operatorname{Arctan} x\, dx = \frac{x^3}{3} . \operatorname{Arctan} x - \int \frac{x^3}{3} . \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\operatorname{Arctan} x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{1+x^2}dx \; ; \quad \begin{array}{r|l} x^3 & 1+x^2 \\ \hline -\ x+x^3 & x \\ \hline -x & \end{array}$$

$$= \frac{x^3}{3}\operatorname{Arctan} x - \frac{1}{3}\int \left(x - \frac{x}{1+x^2}\right) dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\operatorname{Arctan} x - \frac{1}{3}\int x\, dx + \frac{1}{3}\underbrace{\int \frac{x}{1+x^2}dx}_{\substack{u = 1+x^2 \\ du = 2x\, dx}}$$

$$= \frac{x^3}{3}\operatorname{Arctan} x - \frac{1}{3}\frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} . \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du$$

$$= \frac{x^3}{3}\operatorname{Arctan} x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\ln|u| + C$$

$$= \frac{x^3}{3}\operatorname{Arctan} x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\ln|1+x^2| + C$$

6. $\int_0^{\pi/3} \tan x \sec^{3/2} x dx$ integralini hesaplayınız.

$t = \sec x$

$dt = \sec x . \tan x\, dx$

Önce belirsiz integrali çözelim;

$$\int \tan x . \sec^{3/2} x\, dx = \int \sec^{1/2} x . \sec x . \tan x\, dx$$

$$= \int t^{1/2} dt$$

$$= t^{3/2} . \frac{2}{3}$$

$$= \frac{2}{3} . \sec^{3/2} x$$

$$\int_0^{\pi/3} \tan x . \sec^{3/2} x\, dx = \frac{2}{3}\sec^{3/2} x \Big|_0^{\pi/3}$$

$$= \frac{2}{3}\left[\left(\frac{1}{\cos \pi/3}\right)^{3/2} - \left(\frac{1}{\cos 0}\right)^{3/2} \right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[(2)^{3/2} - 1^{3/2} \right]$$

$$= \frac{2}{3}\left(2^{3/2} - 1 \right)$$

7. $\displaystyle\int_5^\infty \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Önce belirsiz integrali çözelim;

$$\int \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,dx = \int (3x+1)^{-1/2}\,dx \quad ; \quad u=3x+1, \; du=3dx$$

$$= \frac{1}{3}\int u^{-1/2}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\, u^{1/2} \cdot 2$$

$$= \frac{2}{3}\, u^{1/2} = \frac{2}{3}(3x+1)^{1/2}$$

$$\int_5^\infty \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_5^b \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{2}{3}(3x+1)^{1/2}\Big|_5^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{2}{3}\left[(3b+1)^{1/2} - 4\right]$$

$$= \infty$$

olduğundan has olmayan integral ıraksaktır.

8. $n=4$ için $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$ integraline yaklaşık bir sonuç elde edebilmek için Simpson kuralını kullanınız.

Simpson Kuralı:

$\int_a^b f(x)\,dx \approx S_n$ yaklaşımıdır. Burada n çift ve

$$S_n = \frac{b-a}{3n}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + f(x_n)\right]$$

$n=4$ için $\quad \Delta x = \frac{4-0}{4} = 1$

$x_0=0, \; x_1=1, \; x_2=2, \; x_3=3, \; x_4=4$

$$S_4 = \frac{4-0}{12}\left[f(0) + 4f(1) + 2f(2) + 4f(3) + f(4)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[1 + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + 4\sqrt{7} + 3\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[4 + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + 4\sqrt{7}\right]$$

$$\cong 8{,}66$$

9. $\left\{\dfrac{4n-1}{5n+2}\right\}$ dizisinin monotonluğunu inceleyiniz. Bu dizi yakınsak mıdır? Neden?

Önce monotonluğunu inceleyelim:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4(n+1)-1}{5(n+1)+2} \cdot \frac{5n+2}{4n-1}$$

$$= \frac{20n^2+23n+6}{20n^2+23n-7} > 1$$

olduğundan verilen dizi artandır. Dolayısıyla verilen dizi monotondur. Şimdi ise dizinin sınırlı olup olmadığını inceleyelim:

$$\frac{4n-1}{5n+2} = \frac{(5n+2)-(n+3)}{5n+2} = 1 - \frac{n+3}{5n+2} < 1$$

olduğundan dizi üstten 1 ile sınırlıdır. Verilen dizi artan ve sınırlı olduğu için yakınsaktır.

10. $1+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt{3}}+\cdots$ serisinin yakınsak veya ıraksaklığını belirleyiniz.

Serinin karakterini integral testi yardımı ile belirleyebiliriz. $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ fonksiyonu $[1,\infty)$ aralığında süreklidir, negatif değildir ve azalandır. $k \geq 1$ için $f(k) = a_k$ dır. Dolayısıyla integral testi uygulanabilir.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-3/2}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} x^{-1/2}(-2) \Big|_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} -2\left[\frac{1}{\sqrt{b}} - 1\right]$$

$$= 2$$

olduğundan, verilen seri integral testi gereği yakınsaktır.

NOT: Eğer istenirse, başka uygun bir test yardımıyla da serinin yakınsak olduğu gösterilebilir.

Sınav süresi 90 dakikadır. Başarılar.

Prof. Dr. İ. Naci Cangül, Doç. Dr. Gökhan Soydan, Arş. Gör. Elif Çetin