MAT 1002 ANALİZ II, Ara Sınav Soruları

Öğrenci No : ……………………

Adı, Soyadı : ……………………

CEVAP ANAHTARI

08.08.2014

Aşağıdaki soruların cevaplarını boşluklara yazınız.

1. $\int \frac{1}{(x^2+6x+13)^2}dx$ integralini hesaplayınız.

$$I = \int \frac{1}{(x^2+6x+13)^2}dx = \int \frac{1}{(4+(x+3)^2)^2}dx$$

$x+3 = 2\tan t$ değişken değişimi ile

$dx = 2\sec^2 t\, dt$

bulunur. Buradan,

$$I = \int \frac{2\sec^2 t\, dt}{(4+4\tan^2 t)^2} = \int \frac{2\sec^2 t\, dt}{16(1+\tan^2 t)^2}$$

$1+\tan^2 t = \sec^2 t$ olduğundan,

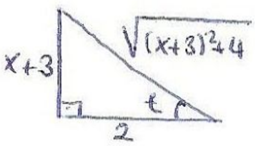
$$I = \frac{1}{8}\int \frac{\sec^2 t\, dt}{\sec^4 t} = \frac{1}{8}\int \cos^2 t\, dt$$

$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$ olduğundan,

$$I = \frac{1}{8}\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{16}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C$$

$$= \frac{1}{16}t + \frac{1}{16}\sin t.\cos t + C$$

Dik üçgen yardımıyla,



$$I = \frac{1}{16}\text{Arctan}\left(\frac{x+3}{2}\right) + \frac{1}{16}\frac{x+3}{\sqrt{(x+3)^2+4}}\cdot\frac{2}{\sqrt{(x+3)^2+4}}+C$$

$$= \frac{1}{16}\text{Arctan}\left(\frac{x+3}{2}\right) + \frac{1}{8}\frac{x+3}{(x+3)^2+4}+C$$

elde edilir.

2. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x - \cos^3 x}dx$ integralini hesaplayınız.

$u = \cos x$ değişken değişimi yapılırsa,

$du = -\sin x\, dx$

$$I = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x - \cos^3 x}dx = \int \frac{-du}{u^2-u^3}$$

$$= \int \frac{du}{u^3-u^2} = \int \frac{du}{u^2(u-1)}$$

Basit kesirlere ayırma yöntemi ile,

$$\frac{1}{u^2(u-1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{C}{u-1}$$

$$1 = Au(u-1) + B(u-1) + Cu^2$$

$u=0 \Rightarrow \boxed{B=-1}$, $u=1 \Rightarrow \boxed{C=1}$

$u=-1 \Rightarrow 1 = 2A-2B+C \Rightarrow \boxed{A=-1}$

$$I = -\int\frac{du}{u} - \int\frac{du}{u^2} + \int\frac{du}{u-1}$$

$$= -\ln|u| + \frac{1}{u} + \ln|u-1| + C$$

$$= -\ln|\cos x| + \frac{1}{\cos x} + \ln|\cos x - 1| + C$$

bulunur.

3. $[1,4]$ aralığında $y=\frac{1}{3}x^{3/2}-x^{1/2}$ fonksiyonunun yay uzunluğunu bulunuz.

Yay uzunluğu $\Rightarrow L=\int_1^4 \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$

$f(x)=y=\frac{1}{3}x^{3/2}-x^{1/2} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}x^{1/2}-\frac{1}{2}\frac{1}{x^{1/2}}$

$L=\int_1^4 \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}x^{1/2}-\frac{1}{2x^{1/2}}\right)^2}\,dx$

$=\int_1^4 \sqrt{1+\frac{x}{4}-2\cdot\frac{1}{2}x^{1/2}\cdot\frac{1}{2x^{1/2}}+\frac{1}{4x}}\,dx$

$=\int_1^4 \sqrt{\frac{x}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4x}}\,dx=\int_1^4 \sqrt{\left(\frac{1}{2}x^{1/2}+\frac{1}{2x^{1/2}}\right)^2}\,dx$

$=\int_1^4 \left(\frac{1}{2}x^{1/2}+\frac{1}{2}x^{-1/2}\right)dx$

$=\left(\frac{1}{2}x^{3/2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot x^{1/2}\cdot 2\right)\Big|_1^4=\left(\frac{1}{3}x^{3/2}+x^{1/2}\right)\Big|_1^4$

$=\left[\left(\frac{1}{3}\cdot 8+2\right)-\left(\frac{1}{3}+1\right)\right]=\frac{10}{3}$

4. $\int x\sin^3 x^2 dx$ integralini hesaplayınız.

$u=x^2$ değişken değişimi yapılırsa $du=2x\,dx$ olarak bulunur. Buradan,

$I=\int x\cdot\sin^3 x^2\,dx=\frac{1}{2}\int \sin^3 u\,du$

$=\frac{1}{2}\int \sin^2 u\cdot\sin u\,du$

$=\frac{1}{2}\int (1-\cos^2 u)\sin u\,du$

$t=\cos u$, $dt=-\sin u\,du$

$I=-\frac{1}{2}\int(1-t^2)\,dt=-\frac{1}{2}\left(t-\frac{t^3}{3}\right)+C$

$=-\frac{1}{2}\left(\cos u-\frac{\cos^3 u}{3}\right)+C$

$=-\frac{1}{2}\left(\cos x^2-\frac{\cos^3 x^2}{3}\right)+C$

5. $\int e^{-x}\cos 5x\,dx$ integralini hesaplayınız.

Kısmi integrasyon uygulayalım:

$u=\cos 5x \qquad dv=e^{-x}dx$

$du=-5\sin 5x\,dx \qquad v=-e^{-x}$

$I=\int e^{-x}\cos 5x\,dx$

$I=-e^{-x}\cdot\cos 5x-5\underbrace{\int e^{-x}\sin 5x\,dx}$ $\to$ $u=\sin 5x$, $du=5\cdot\cos 5x\,dx$, $dv=e^{-x}dx$, $v=-e^{-x}$

(tekrar kısmi integrasyon)

$I=-e^{-x}\cdot\cos 5x-5\left(-e^{-x}\sin 5x+5\underbrace{\int e^{-x}\cos 5x\,dx}_{I}\right)$

$I=-e^{-x}\cos 5x+5e^{-x}\sin 5x-25I$

$26I=e^{-x}(5\sin 5x-\cos 5x)$

$I=\frac{e^{-x}}{26}(5\sin 5x-\cos 5x)+C$

6. $\int_{2/\pi}^{\infty}\frac{\sin(1/x)}{x^2}dx$ integralini hesaplayınız.

$I=\int_{2/\pi}^{\infty}\frac{\sin(1/x)}{x^2}dx=\lim_{b\to\infty}\int_{2/\pi}^{b}\frac{\sin(1/x)}{x^2}dx$

Önce belirsiz integrali hesaplayalım.

$\int\frac{\sin(1/x)}{x^2}dx \Rightarrow u=\frac{1}{x} \quad du=-\frac{1}{x^2}dx$

$\int\frac{\sin(1/x)}{x^2}dx=-\int \sin u\,du=\cos u=\cos(1/x)$

$I=\lim_{b\to\infty}\cos(1/x)\Big|_{2/\pi}^{b}$

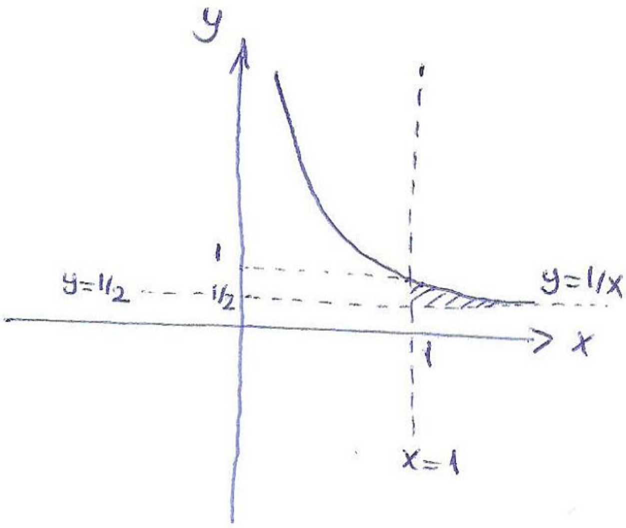
$=\lim_{b\to\infty}[\cos(1/b)-\cos(\pi/2)]$

$=1-0$

$=1$

elde edilir.

7. $y=\frac{1}{x}$, $x=1$ ve $y=\frac{1}{2}$ denklemlerinin grafikleri tarafından sınırlanan bölgenin $y-$ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini dilimleme metodu ile bulunuz.



$y=\frac{1}{x} \Rightarrow x=\frac{1}{y}$

$V_1=\pi\int_{1/2}^{1}\left(\frac{1}{y}\right)^2dy=\pi\int_{1/2}^{1}y^{-2}dy$

$=\pi\cdot\left(-\frac{1}{y}\right)\Big|_{1/2}^{1}=\pi$

Bu hacimden, ortada kalan silindirin hacmini çıkarmalıyız.

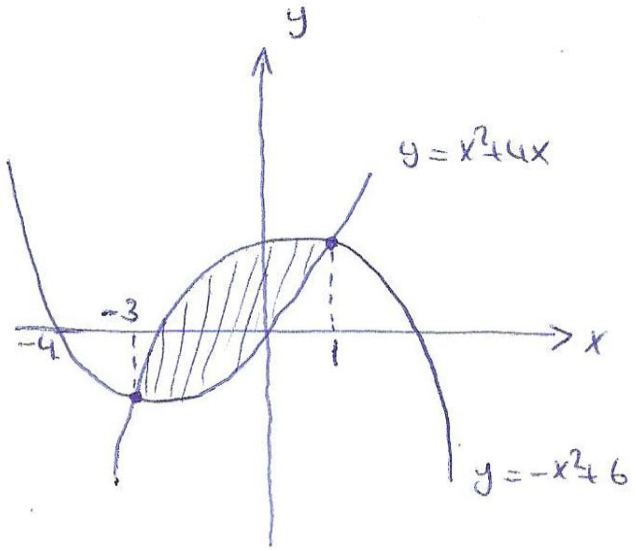
$V_2=\pi\cdot\int_{1/2}^{1}1^2\,dy=\pi\cdot y\Big|_{1/2}^{1}=\frac{\pi}{2}$

İstenen hacim: $V=V_1-V_2$

$=\pi-\frac{\pi}{2}$

$=\frac{\pi}{2}$

8. $y=-x^2+6$ ve $y=x^2+4x$ fonksiyonlarının grafikleri tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.



Öncelikle verilen fonksiyonların kesim noktasını bulalım:

$-x^2+6=x^2+4x \Rightarrow 0=2x^2+4x-6$

$0=(x+3)(x-1)$

$x=1 \lor x=-3$

$A=\int_{-3}^{1}\left[(-x^2+6)-(x^2+4x)\right]dx$

$=\int_{-3}^{1}(-2x^2-4x+6)\,dx$

$=\left(-\frac{2}{3}x^3-2x^2+6x\right)\Big|_{-3}^{1}$

$=\left[\left(-\frac{2}{3}-2+6\right)-\left(\frac{2}{3}\cdot3^3-18-18\right)\right]$

$=\frac{64}{3}$

9. $f(x)=2x+1$ fonksiyonunun grafiğinin altında kalan alanı, $[1,5]$ aralığını n eşit parçaya bölerek ve x_k^* noktalarını her bir alt aralığın sağ uç noktası olarak alarak, dikdörtgenler yardımı ile hesaplayınız.

$[1,5]$ aralığını n eşit parçaya bölersek, aralık boyu $\Delta x = \frac{5-1}{n} = \frac{4}{n}$

$x_1 = 1+\frac{4}{n}$, $x_2 = 1+\frac{8}{n}$, ..., $x_k = 1+\frac{4k}{n}$, ..., $x_n = 5$

olduğundan verilen dikdörtgenlerin alanları toplamı,

$$f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

$$f(x_k) = 2x_k + 1 = 2\left(1+\frac{4k}{n}\right)+1 = 3+\frac{8k}{n}$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(3+\frac{8k}{n}\right)\frac{4}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{12}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 + \frac{32}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{12}{\cancel{n}}\cdot\cancel{n} + \frac{32}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$= 12+16 = 28$$

10. $\int_0^{\pi/4} \tan y \sec^4 y\,dy$ integralini hesaplayınız.

$t=\tan y$ değişken değişimi ile,
$dt = \sec^2 y\,dy$

$$I = \int \tan y . \sec^4 y\,dy$$

$$= \int \tan y . \sec^2 y . \sec^2 y\,dy$$

$$= \int \tan y\,(1+\tan^2 y) . \sec^2 y\,dy$$

$$= \int t . (1+t^2)\,dt$$

$$= \int (t+t^3)\,dt = \frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4}$$

$$= \frac{\tan^2 y}{2}+\frac{\tan^4 y}{4}$$

$$\int_0^{\pi/4} \tan y . \sec^4 y\,dy = \left.\frac{\tan^2 y}{2}+\frac{\tan^4 y}{4}\right|_0^{\pi/4}$$

$$= \left(\frac{\tan^2 \pi/4}{2}+\frac{\tan^4 \pi/4}{4}\right) - \left(\frac{\tan^2 0}{2}+\frac{\tan^4 0}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) - 0$$

$$= \frac{3}{4}$$

Uyarı: Eğer istenirse $t=\sec y$ değişken değişimi yapılarak da bu soru çözülebilir.

Sınav süresi 90 dakikadır. Başarılar.

Prof. Dr. İ. Naci Cangül, Arş. Gör. Elif Çetin