MAT 1002 ANALİZ II, Final Soruları

Öğrenci No : 29.05.2014

Adı, Soyadı : ....

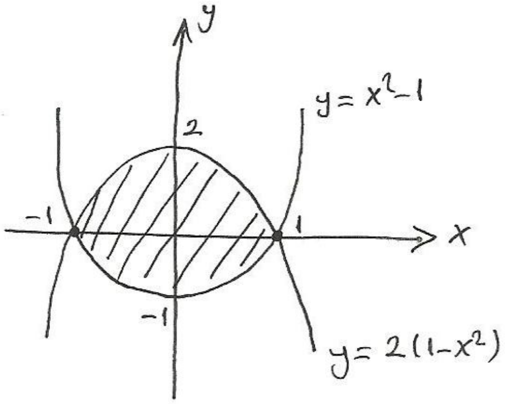
Aşağıdaki soruların cevaplarını boşluklara yazınız.

1. $y=2(1-x^2)$ ve $y=x^2-1$ fonksiyonlarının grafikleri tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz. **(10p.)**

Öncelikle verilen fonksiyonların kesim noktalarını bulalım:

$$2-2x^2=x^2-1 \Rightarrow 3=3x^2 \Rightarrow x^2=1$$
$$\Rightarrow x=1 \vee x=-1$$

elde edilir. Verilen fonksiyonların grafikleri aşağıdaki gibidir:



Böylece iki eğri tarafından sınırlanan alan:

$$A=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

olduğundan,

$$A=\int_{-1}^{1}[2(1-x^2)-(x^2-1)]dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(2-2x^2-x^2+1)dx=\int_{-1}^{1}(3-3x^2)dx$$
$$=(3x-x^3)\Big|_{-1}^{1}=[(3-1)-(-3+1)]$$
$$=4$$

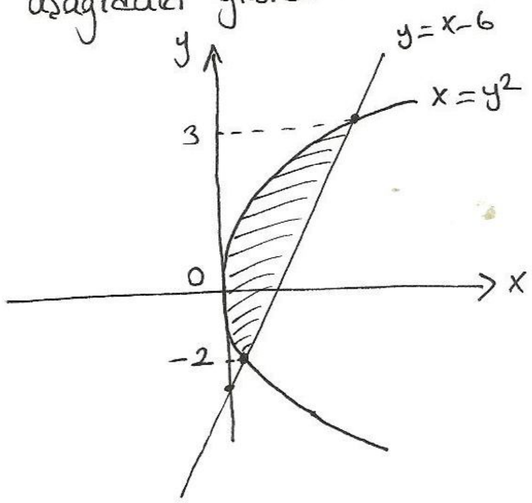
elde edilir.

2. $x=y^2$ ve $y=x-6$ fonksiyonlarının grafikleri tarafından sınırlanan bölgenin, y-ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmini, dilimleme metoduyla bulunuz. **(10p.)**

Verilen fonksiyonların kesiştikleri noktalar:

$$y+6=y^2 \Rightarrow y^2-y-6=0 \Rightarrow y=3 \vee y=-2$$

olarak bulunur. Fonksiyonların grafikleri aşağıdaki gibidir:



Hacim formülü:

$$V=\pi\int_a^b[f(y)]^2dy-\pi\int_a^b[g(y)]^2dy$$

olduğundan,

$$V=\pi\int_{-2}^{3}(y+6)^2dy-\pi\int_{-2}^{3}(y^2)^2dy$$
$$=\pi.\frac{(y+6)^3}{3}\Big|_{-2}^{3}-\pi.\frac{y^5}{5}\Big|_{-2}^{3}$$
$$=\pi.\left[243-\frac{64}{3}\right]-\pi.\left[\frac{243}{5}+\frac{32}{5}\right]$$
$$=\frac{500\pi}{3}$$

olarak bulunur.

3. $\int x \sec^2 x dx$ integralini hesaplayınız. **(10p.)**

Verilen integral, kısmi integrasyon metodu ile hesaplanabilir.

(LAPTÜ)

$u = x \qquad dv = \sec^2 x \, dx$

$du = dx \qquad v = \tan x$

olduğundan, $I = \int x . \sec^2 x dx$ dersek,

$$I = x . \tan x - \int \tan x \, dx$$

$$= x . \tan x - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx , \quad t = \cos x, \; dt = -\sin x dx$$

$$= x . \tan x + \int \frac{1}{t} dt$$

$$= x . \tan x + \ln |t| + C$$

$$= x . \tan x + \ln |\cos x| + C$$

<u>Not:</u> Eğer $\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C$ olduğu biliniyorsa, direkt olarak yazılabilir. Bu durumda $t = \cos x$ değişken değişimi yapmaya gerek yoktur.

4. $\int \frac{x^3}{(1-x^2)^{5/2}} dx$ integralini hesaplayınız. **(10p.)**

$x = \sin t$ değişken değişimi yapılırsa $dx = \cos t \, dt$ olur. Böylece,

$$I = \int \frac{x^3}{(1-x^2)^{5/2}} dx = \int \frac{\sin^3 t \cos t \, dt}{(1-\sin^2 t)^{5/2}}$$

$$= \int \frac{\sin^3 t \cos t \, dt}{(\cos^2 t)^{5/2}} \quad ; \quad 1 - \sin^2 t = \cos^2 t$$

$$= \int \frac{\sin^3 t}{\cos^4 t} dt = \int \frac{\sin^2 t . \sin t}{\cos^4 t} dt$$

$$= \int \frac{(1-\cos^2 t)\sin t}{\cos^4 t} dt$$

burada $u = \cos t$ değişken değişimi yapılırsa, $du = -\sin t \, dt$ olur.

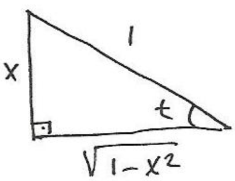
$$I = \int -\frac{(1-u^2)}{u^4} du = \int \frac{u^2 - 1}{u^4} du$$

$$= \int (u^{-2} - u^{-4}) du$$

$$= \frac{u^{-1}}{-1} - \frac{u^{-3}}{-3} + C$$

$$= -\frac{1}{u} + \frac{1}{3u^3} + C$$

$$= -\frac{1}{\cos t} + \frac{1}{3\cos^3 t} + C \; ;$$



$$= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{3(\sqrt{1-x^2})^3} + C$$

5. $\int_0^2 \frac{2x-1}{(x+3)^2}dx$ integralini hesaplayınız. **(10p.)**

Verilen integral, basit kesirlere ayırma metodu ile çözülebilir.

$$\frac{2x-1}{(x+3)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2}$$

$$2x-1 = A(x+3) + B$$

$x=-3 \Rightarrow B=-7$

$x=0 \Rightarrow A=2$

$$\int_0^2 \frac{2x-1}{(x+3)^2}dx = \int_0^2 \frac{2}{x+3}dx + \int_0^2 \frac{-7}{(x+3)^2}dx$$

$$= 2\int_0^2 \frac{1}{x+3}dx - 7\int_0^2 \frac{1}{(x+3)^2}dx$$

$$= 2\ln|x+3|\Big|_0^2 + 7.(x+3)^{-1}\Big|_0^2$$

$$= 2(\ln 5 - \ln 3) + 7.\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)$$

$$= 2\ln\frac{5}{3} - \frac{14}{15}$$

6. $n=4$ için $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ integraline yaklaşık bir sonuç elde edebilmek için Simpson kuralını kullanınız. **(10p.)**

Simpson kuralı: $\int_a^b f(x)dx \approx S_n$ yaklaşımıdır.

Burada n çift ve

$$S_n = \frac{b-a}{3n}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\dots+f(x_n)\right]$$

$n=4$ için $\Delta x = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$

$x_0=0,\ x_1=\frac{1}{4},\ x_2=\frac{1}{2},\ x_3=\frac{3}{4},\ x_4=1$

$$S_4 = \frac{1-0}{12}\left[f(0)+4f\left(\tfrac{1}{4}\right)+2f\left(\tfrac{1}{2}\right)+4f\left(\tfrac{3}{4}\right)+f(1)\right]$$

$$= \frac{1}{12}\left[1+4.\frac{16}{17}+2.\frac{4}{5}+4.\frac{16}{25}+\frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{12}+\frac{16}{51}+\frac{2}{15}+\frac{16}{75}+\frac{1}{24}$$

$$\cong 0{,}783$$

7. $(0,8),(0,8)^2,(0,8)^3,\dots$ dizisinin yakınsak olup olmadığını belirleyiniz. **(10p.)**

Sınırlı ve monoton bir dizinin yakınsak olduğunu biliyoruz. Önce monotonluğunu inceleyelim:

$$a_n = (0{,}8)^n = \left(\frac{8}{10}\right)^n = \left(\frac{4}{5}\right)^n, \quad a_{n+1} = \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4^{n+1}}{5^{n+1}}\cdot\frac{5^n}{4^n} = \frac{4}{5} < 1$ olduğundan verilen dizi azalandır, yani monotondur.

Sınırlı olup olmadığını kontrol edelim:

$0<n$ olduğundan $1 = \left(\frac{4}{5}\right)^0 < \left(\frac{4}{5}\right)^n$ yazılabilir. Yani bu dizi alttan 1 ile sınırlıdır.

Verilen dizi monoton ve sınırlı olduğundan yakınsaktır.

8. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ serisinin toplamını bulunuz. **(10p.)**

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$$

$$1 = A(k+1) + Bk$$

$$k=0 \Rightarrow A=1$$

$$k=-1 \Rightarrow B=-1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

şeklinde yazılabilir. Serinin n-inci kısmi toplamı,

$$S_n = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

olur. $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$

olduğundan seri yakınsaktır ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1 \text{ dir.}$$

9. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)^{3/2}}$ serisinin yakınsak olup olmadığını, <u>integral testi</u> kullanarak belirleyiniz. **(10p.)**

$f(x) = \frac{1}{(4x+1)^{3/2}}$ fonksiyonu $[2,\infty)$ aralığı üzerinde süreklidir, negatif değildir ve azalandır. $k \geq 2$ için $f(k) = a_k$ dır. Dolayısıyla integral testi uygulanabilir.

$$I = \int_2^{\infty} \frac{1}{(4x+1)^{3/2}} dx = \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{1}{(4x+1)^{3/2}} dx$$

(Belirsiz integral: $\int \frac{1}{(4x+1)^{3/2}} dx$, $4x+1=u$, $4dx=du$

$$\frac{1}{4}\int \frac{du}{u^{3/2}} = \frac{1}{4}\int u^{-3/2} du = \frac{1}{4}\frac{u^{-1/2}}{-1/2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{4x+1}}$$)

$$I = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4x+1}} \Big|_2^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{2}\left[\cancelto{0}{\frac{1}{\sqrt{4b+1}}} - \frac{1}{\sqrt{9}}\right] = \frac{1}{6}$$

olduğundan integral testi gereği verilen seri yakınsaktır.

10. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2+k2^k}$ serisinin yakınsak olup olmadığını, <u>karşılaştırma testi</u> kullanarak belirleyiniz. **(10p.)**

$$\frac{2}{2+k.2^k} < \frac{2}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}$$

yazılabilir. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}}$ geometrik serisi $r=\frac{1}{2}$, $|r|<1$ olduğundan yakınsaktır. Dolayısıyla karşılaştırma testi gereği verilen seri de yakınsaktır.

Sınav süresi 90 dakikadır. Başarılar.

Prof. Dr. İ. Naci Cangül, Arş. Gör. Elif Çetin