........./ ..../ 20......

$\mathbb{Z}_{38}$ halkasındaki çift sayıların kümesinin birimi hakkında ne söylenebilir?

Bu halka $A=\{0,2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,\ldots,34,36\}$'dır. Deneme yoluyla $\frac{38}{2}+1=20$'nin birim eleman olduğunu görürüz:

$$20.0=0,\quad 20.2=40=2,\quad 20.4=80=4,\ \ldots,\ 20.36\equiv 20.-2 \equiv -2 \equiv 36$$

olup 20 birim elemandır. Bu durum $\mathbb{Z}_n$ halkasında $n\equiv 4k+2$ $(k\in\mathbb{Z}^+)$ olduğunda geçerlidir.

$\mathbb{Z}$ tamsayılar halkasının kesir cismini bulunuz.

$a,b\in\mathbb{Z}$, $b\neq 0$ olmak üzere $\mathbb{Z}$'nin kesir cismi ab^{-1} elemanlarından oluşur. $b\neq 0$ olduğundan ab^{-1} yerine a/b alabiliriz ki tüm a/b'lerin kümesi $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesidir. O halde $\mathbb{Z}$ halkasının kesir cismi $\mathbb{Q}$ olur.

$12x^3-20x^2+12x-15$ polinomunun $\mathbb{Z}_{11}$ halkasındaki çözüm kümesi nedir?

$12x^3-20x^2+12x-15\equiv x^3-9x^2+23x-15$ olarak düzenlenebilir ve bu da $(x-1)(x-3)(x-5)$ şekline getirilebilir. Yani $Ç=\{1,3,5\}$ olur. Alternatif olarak $x=1$ için $12-20+12-15=-11\equiv 0 \pmod{11}$ olur ve $x=1$ bir köktür. Verilen polinomu $x-1$ ile bölersek $12x^2-8x+4$ bulunur. Bu da $x^2-8x+15$ olarak düzenlenebilir (mod 11). Yani diğer kökler 3 ve 5 olur. Aslında $\mathbb{Z}_{11}$'deki sayılar sırayla denenerek de bulunur.

......../ ..../ 20......

(*) $(0,1,1,0,0,0,\dots)$ ile $(3,1,0,1,0,0,0,\dots)$ polinomlarının çarpımı aşağıdakilerden hangisidir?

$(0,1,1,0,0,0,\dots) = x+x^2$ ve $(3,1,0,1,0,0,0,\dots) = 3+x+x^3$

olup

$(x+x^2)(3+x+x^3) = 3x+x^2+x^4+3x^2+x^3+x^5$

$= (0,3,4,1,1,1,0,0,0,\dots)$

(*) $(1,1,1,0,1,0,0,0,\dots)$ ile $(0,0,1,1,1,0,0,0,\dots)$ polinomlarının toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

$(1,1,1,0,1,0,0,0,\dots)+(0,0,1,1,1,0,0,0,\dots) = (1+x+x^2+x^4)+(x^2+x^3+x^4)$

$= 1+x+2x^2+x^3+2x^4$

$= (1,1,2,1,2,0,0,0,\dots)$

(*) $(3,1,0,2,0,0,0,\dots)$ ile $(1,0,2,3,0,0,0)$ polinomlarının çarpımının derecesi m; toplamının derecesi n ise $m+n$ nedir?

$(3,1,0,2,0,0,0,\dots) = 3+x+2x^3$ ve $(1,0,2,3,0,0,0) = 1+2x^2+3x^3$

olup çarpımın derecesi $m=6$; toplamın derecesi $n=3$ olur.

Yani $m+n = 6+3 = 9$ olur.

(*) İki monik polinomun toplamının derecesi hakkında ne söylenebilir?

Monik polinom, başkatsayısı, yani en büyük dereceli ~~...~~ terimin katsayısı 1 olan polinomdur. Derecesi her pozitif tamsayı olabilir. Dolayısıyla iki monik polinomun toplamının derecesi de her pozitif tamsayı olabilir.

(A) Aşağıdakilerden hangisi ilkel bir polinomdur?

a) $21x^2 - 9x + 15$ b) $5x^2 - 25x + 125$ c) $16x^3 - 32x^2 - 8x + 4$

d) $x^7 - 14x + 21$ e) $11x - 33$

İlkel polinom, tüm katsayılarının obebi 1 olan bir polinomdur. a, b, c, e seçeneklerindeki polinomların tüm katsayıları sırasıyla 3, 5, 2 ve 11 ile bölünebilir ve ilkel değildirler. d'deki polinomun katsayıları 1, −14 ve 21 olup hiçbir asal sayısıyla aynı anda bölünmezler. Yani bu polinom ilkeldir.

(A) Bir çemberin simetrileri grubu kaç elemanlıdır?

Düzlemsel bir şeklin simetrileri dönmeler ve yansımalardır. Bir çemberi kaç derece döndürürsek döndürelim yine aynı çemberi elde ederiz. Dolayısıyla aranan grup sonsuz elemanlıdır.

(X) Aşağıdakilerden hangisi bir tamlık bölgesidir?

a) $\mathbb{Z}_3$ b) $\mathbb{Z}_4$ c) $\mathbb{Z}_6$ d) $\mathbb{Z}_8$ e) $\mathbb{Z}_9$

Tamlık bölgesi sıfır bölensiz olmalıdır. Bu da $\mathbb{Z}_n$ halkaları için n asalken mümkündür, n asal değilse $1 < a \leq b < n$ şeklinde a ve b bölenleri vardır ve bu iki sayı sıfır bölen olurlar. Seçeneklerden sadece $\mathbb{Z}_3$ bir tamlık bölgesi olur. $\mathbb{Z}_4$'de 2, bir sıfır bölendir. $\mathbb{Z}_6$'da 2 ve 3; $\mathbb{Z}_8$'de 2 ve 4; $\mathbb{Z}_9$'da ise 3 bir sıfır bölendir.